

**CIMAT**

**TEORÍA DE MORSE DISCRETA Y  
GRÁFICAS DE REEB APLICADAS A ATD**

Juan Ahtziri González Lemus



# Contenido

<b>1</b>	<b>Preliminares topológicos.</b>	<b>7</b>
1.1	Complejos simpliciales . . . . .	7
1.2	Propiedades de los complejos simpliciales . . . . .	13
1.3	Complejos de Čech y de Vietoris-Rips . . . . .	16
1.4	Complejos CW . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Teoría de Morse discreta</b>	<b>23</b>
2.1	Definiciones y ejemplos . . . . .	24
2.2	Propiedades de las funciones de Morse discretas . . . . .	28
2.3	Teorema principal . . . . .	30
2.4	Campo gradiente discreto y su flujo . . . . .	32
2.5	El Complejo de Morse . . . . .	35
2.6	Teoría de Morse discreta y persistencia . . . . .	37
2.7	Aplicaciones de teoría de Morse discreta . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Gráficas de Reeb</b>	<b>41</b>
3.1	Funciones lineales por pedazos . . . . .	42
3.2	Gráficas de Reeb . . . . .	44
3.3	Superficies trianguladas . . . . .	46
3.4	Gráficas de Reeb en superficies trianguladas . . . . .	49
3.5	Gráficas de Reeb y persistencia . . . . .	56
3.6	Aplicaciones de las Gráficas de Reeb . . . . .	57



# Introducción

El análisis topológico de datos es una técnica cuya idea general es estudiar la forma que tiene una nube de datos dentro un espacio métrico. Esta técnica ha adquirido una popularidad fuerte a nivel mundial, prueba de ello es el basto número de artículos en los que aplican el análisis topológico de datos (ATD) que podemos encontrar actualmente en la red. El ATD se ayuda de ideas proveniente de la topología, la geometría, el álgebra y la probabilidad, para extraer información de una nube de datos, después, por medio de la computación se realiza un análisis estadístico de la información obtenida. Esta conjunción de áreas hace del ATD una herramienta poderosa pero a la vez pesada de entender y manejar. El Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) está haciendo un esfuerzo para comprender las ideas del ATD y en un futuro cercano poder aplicarlas en problemáticas del país, además de desarrollar investigación en esta interesante y prometedora área.

Para comprender la forma de una nube de datos, el ATD se ayuda de la homología persistente, pero resulta que el cálculo y análisis de ésta puede ser una empresa pesada ya que envuelve las siguientes 3 tareas: La generación de complejos simpliciales que aproximen la forma de los datos, el cálculo de la homología persistente de dichos complejos y el análisis de los resultados obtenidos (para una introducción elemental y detallada a la homología persistente consultar [10]). En los trabajos más recientes se está intentado facilitar los cálculos utilizando distintas técnicas que permiten optimizar la elección de los complejos simpliciales, facilitar los cálculos de la homología persistente y encontrar maneras más eficientes y rápidas de analizar los resultados.

La Teoría de Morse históricamente se ha utilizado para facilitar cálculos de los grupos de homología y homotopía de variedades diferenciables, de manera que esta poderosa herramienta no podía quedarse afuera de este afán por facilitar los cálculos envueltos en las técnicas del ATD. Para poder introducir la teoría de Morse al ATD es necesario considerar una adaptación a complejos simpliciales, pues en ellos no existe la noción de función de Morse en su manera clásica. El objetivo de estas notas es proporcionar una introducción a la Teoría de Morse discreta (desarrollada por Robin Forman a

finales de la década de los 90) y a las gráficas de Reeb de complejos simpliciales, ya que dichas teorías han sido utilizadas por distintos autores para facilitar cálculos de homología persistente. Los temas serán estudiados de una manera sencilla y accesible, además se mostrarán muchos ejemplos que ilustren las definiciones y las complicaciones que aparecen.

Estas notas se dividen en tres capítulos cuyos temas están organizados de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se introducen los complejos simpliciales y se mencionan las propiedades y se prueban los resultados sobre éstos que serán necesarios en capítulos posteriores. En la sección final del capítulo se definen los complejos CW, los cuales se utilizan en los resultados de la teoría de Morse discreta. En el Capítulo 2 se proporcionan las definiciones de la teoría de Morse discreta y se prueban los resultados principales de ella sobre complejos simpliciales, cabe mencionar que aunque dicha teoría se desarrolló originalmente sobre complejos CW, aquí sólo se probarán los resultados sobre complejos simpliciales, ya que con estos basta para el cálculo de la homología simplicial. También se definen los campos vectoriales discretos y se calculan varios ejemplos. En la Sección 6, se muestra cómo se puede utilizar la teoría de Morse discreta para calcular la homología persistente de una nube de datos. Además, en la última sección se mencionan algunas referencias en las que se ha utilizado la TMD para resolver distintos tipos de problemáticas. En el Capítulo 3 se definen las Gráficas de Reeb de funciones lineales por pedazos en complejos simpliciales, después se muestra cómo es que estas funciones determinan completamente la topología de superficies trianguladas orientables. Terminamos este capítulo con una sección en la que se mencionan varias referencias donde se utilizan la Gráficas de Reeb para la resolución de problemas que se relacionan principalmente con el reconocimiento de objetos bidimensionales y tridimensionales.

Aprovecho para agradecer a los doctores Víctor Pérez-Abreu Carrión y José Carlos Gómez Larrañaga por darme la oportunidad de participar en este interesante proyecto de estudiar el análisis topológico de datos. También agradezco al CIMAT por su apoyo académico y económico y por generar un ambiente tan agradable para realizar matemáticas. Así mismo agradezco a las distintas personas que leyeron las notas y me proporcionaron comentarios valiosos sin los cuales no hubiese sido imposible finalizarlas, en especial quiero agradecer a los doctores Octavio Arizmendi y Víctor Nuñez por sus sugerencias en la escritura, espero de verdad haber captado sus ideas.

Juan Ahtziri González Lemus  
Michoacán, México  
Noviembre, 2015

# Capítulo 1

## Preliminares topológicos.

El objetivo de estas notas es mostrar cómo aproximando una nube de datos por ciertos espacios topológicos podemos extraer información sobre la manera en la que los datos están distribuidos. En este capítulo proporcionamos una breve introducción a los tipos de espacios topológicos que utilizaremos para alcanzar dicho objetivo; estos espacios son los complejos simpliciales y los complejos CW. Cabe señalar que este capítulo es sólo de preparación para resultados posteriores, por lo que no daremos una introducción extensa al estudio de estos espacios, más bien mencionamos las definiciones y los resultados que utilizaremos en capítulos posteriores.

Este capítulo está dividido de la siguiente manera; en la Sección 1 se proporciona la definición y se dan ejemplos de complejos simpliciales [1, Sección III.1]. En la Sección 2 se mencionan algunas propiedades de los complejos simpliciales que se utilizarán en el Capítulo 2. En la Sección 3 introducimos los complejos de Čech y de Vietoris-Rips [1, Sección III.2], éstos serán utilizados para aproximar la forma global de una nube de datos dentro de un espacio métrico. Por último, en la Sección 4 explicamos de manera detallada la definición de complejo CW y algunas propiedades básicas de éstos. Un estudio detallado de la teoría de complejos CW se puede consultar en [4].

### 1.1 Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales son espacios topológicos que están determinados por una familia de subconjuntos de un número finito de puntos. Esta característica de los complejos simpliciales, nos permite utilizarlos para aproximar algún espacio  $X$  del cual sólo conocemos un conjunto finito de puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_d\}$ . En esta sección daremos una introducción corta y elemental a los aspectos de la Teoría de complejos simpliciales que utilizaremos en

construcciones posteriores.

**Definición 1.1.** Si  $d \leq n$ , entonces decimos que los puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_d\} \subset \mathbb{R}^n$  **están en posición general** si el conjunto de vectores  $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_d - x_0\} \in \mathbb{R}^n$  es linealmente independiente.

Se puede verificar que la propiedad de estar en posición general no depende de la enumeración de los puntos, sólo depende de la posición de ellos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.** Supongamos que el conjunto de puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_d\} \subset \mathbb{R}^n$  está en posición general.

- a) El **simplejo de dimensión  $d$**  generado por los puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_d\}$  es el conjunto

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^d k_i x_i \mid \sum_{i=0}^d k_i = 1 \text{ y } \forall i, k_i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- b) Si  $p \in \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$  es tal que  $p = \sum_{i=0}^d k_i x_i$ , entonces a los escalares  $k_0, k_1, \dots, k_d$  les llamamos las **coordenadas baricéntricas de  $p$** .
- c) Los **vértices** de  $\langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$  son los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_d$ .
- d) Si  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}\} \subset \{x_0, x_1, \dots, x_d\}$  es cualquier subconjunto, entonces decimos que  $\langle x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k} \rangle$  es una **cara** de  $\langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$  y denotamos  $\langle x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k} \rangle < \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$ .
- e) Al simplejo  $\langle e_1, e_2, \dots, e_d, e_{d+1} \rangle$  donde  $e_i \in \mathbb{R}^{d+1}$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica, le llamamos el **simplejo estándar de dimensión  $d$**  y lo denotamos con  $\Delta^d$ .

Esta definición es muy geométrica, de hecho, los simplejos de dimensión 0 son puntos, los de dimensión 1 son segmentos entre dos puntos (sus extremos), los de dimensión 2 son triángulos determinados por 3 puntos (sus vértices), etc. Nótese que por definición, todo simplejo se considera una cara de sí mismo.

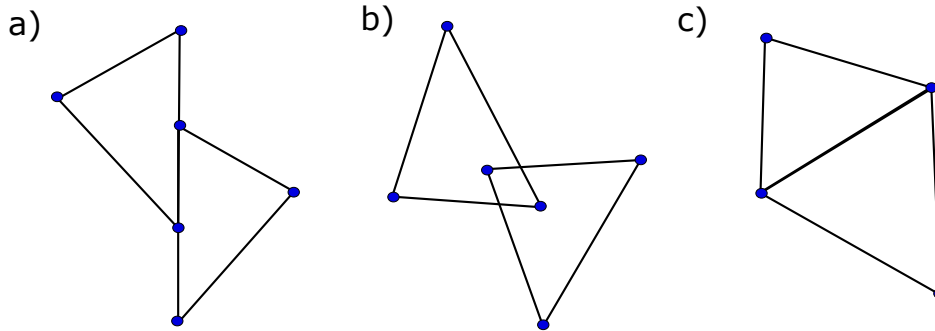
De ahora en adelante, si  $\sigma$  es un simplejo de dimensión  $d$ , entonces diremos que  $\sigma$  es un  $d$ -simplejo y lo denotaremos con  $\sigma^d$  (omitiremos la  $d$  cuando no haya confusión).

**Definición 1.3.** Un **complejo simplicial**  $K$  es una colección finita de simplejos que satisface las siguientes condiciones:



1. Toda cara de un simplejo en  $K$  pertenece a  $K$ .
2. Si  $\sigma, \gamma \in K$ , entonces  $\sigma \cap \gamma = \emptyset$  o  $\sigma \cap \gamma$  es cara de ambos simplejos.

Nótese que la definición no permite cualquier tipo de intersecciones entre los simplejos de  $K$  (Ver Figura 1.1), de hecho, la intersección de cualesquiera dos simplejos en  $K$ , también debe pertenecer a  $K$ .



**Figura 1.1** – Los pegados en a) y b) no están permitidos. El pegado en c) sí está permitido pues se hace a través de una cara común.

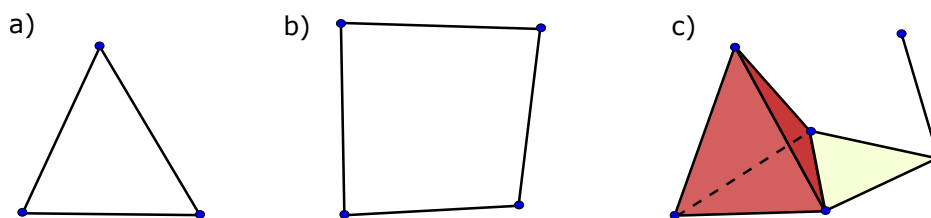
En la siguiente definición se muestran las notaciones y la nomenclatura que utilizaremos sobre complejos simpliciales.

**Definición 1.4.** Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial.

- a) La **dimensión** de  $K$  es el número  $\max_{\sigma \in K} \{\text{dimensión } \sigma\}$  y se denota con  $\dim(K)$ .
- b) Llamaremos **simplejos** o **caras** de  $K$  a los elementos de  $K$ .
- c) Al espacio  $|K| = \cup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n$  con la topología inducida por  $\mathbb{R}^n$ , le llamamos el **espacio subyacente** de  $K$ . En este caso decimos que  $K$  es una triangulación de  $|K|$ .
- d) Si  $K' \subset K$  es una subcolección que por sí misma es un complejo simplicial, entonces decimos que  $K'$  es un **subcomplejo** de  $K$ .
- e) Al subcomplejo que consiste de todos los  $l$ -simplejos con  $l \leq d$ , le llamamos el  **$d$ -esqueleto** de  $K$  y lo denotamos con  $K^{(d)}$ .
- f) Si  $\sigma^l, \tau^d \in K$  son tales que  $\sigma^l < \tau^d$ , entonces decimos que  $\sigma$  es una **cara** de  $\tau$  y que  $\tau$  es un **supercara** de  $\sigma$ .
- f) Si  $\sigma^{d-1}, \tau^d \in K$  son tales que  $\sigma^{d-1} < \tau^d$  y  $\sigma$  no tiene más super caras, entonces decimos que  $\sigma$  es una **cara libre** de  $\tau$ .

Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial, las siguientes dos observaciones que se siguen de la Definición 1.4:

1.  $K^{(0)}$  es el conjunto de vértices de  $K$  y  $K^{(1)}$  es la gráfica determinada por los vértices y los 1-simplejos de  $K$ .
2. Existen complejos simpliciales distintos cuyos espacios subyacentes son homeomorfos (ver Figura 1.2). En general, el espacio subyacente a un complejo simplicial tiene muchas triangulaciones o estructuras de complejo simplicial.



**Figura 1.2** – Ejemplos de complejos simpliciales. Nótese que los incisos a) y b) son complejos simpliciales distintos pero el espacio subyacente de ambos es homeomorfo al círculo.

Recordemos que nuestro objetivo es utilizar complejos simpliciales para aproximar cualquier tipo de datos, ya sea que vivan o no en algún  $\mathbb{R}^n$ . Para lograr este objetivo, necesitamos ampliar la definición de complejo simplicial de manera que no dependa de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.5.** *Un **complejo simplicial abstracto** contenido en un conjunto  $Y$  es una colección  $L$  de subconjuntos de  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ , tal que si  $\sigma \in L$  y  $\beta \subset \sigma$ , entonces  $\beta \in L$ .*

De manera análoga que en complejos simpliciales, los **vértices** de  $L$  son los puntos  $y_0, y_1, \dots, y_n$  y los elementos de  $L$  son llamados **simplejos** o **caras**. Si  $\sigma \in L$  tiene  $d + 1$  elementos, entonces decimos que la **dimensión de  $\sigma$**  es  $d$  y lo denotamos  $\sigma^d$  (o simplemente con  $\sigma$ , si no hay confusión). La **dimensión  $L$**  es igual a la máxima dimensión de sus simplejos. Si  $\tau, \sigma \in L$  son tales que  $\sigma \subset \tau$ , entonces decimos que  $\sigma$  es **cara** de  $\tau$  (escribimos  $\sigma \leq \tau$ ) y que  $\tau$  es **supercara** de  $\sigma$  (escribimos  $\tau \geq \sigma$ ). Además, si  $\sigma$  no es cara de ningún otro simplejo, entonces decimos que  $\sigma$  es una **cara libre** de  $\tau$ .

**Ejemplo 1.6.** *Ejemplos de complejos simpliciales abstractos.*

1.  $L = \{\{\pi, -1\}, \{-1, 0\}, \{-1\}, \{0\}, \{\pi\}, \emptyset\}$  es un complejo simplicial abstracto contenido en  $\mathbb{R}$ . Notar que  $L$  determina una gráfica con 2 aristas y 3 vértices.
2.  $L = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$  es un complejo simplicial abstracto contenido en  $\mathbb{N}$ . Dicho complejo simplicial tiene la misma cantidad de simplejos y de la misma dimensión que  $\Delta^2$ .
3. El complejo simplicial estándar  $\Delta^3 \subset \mathbb{R}^4$  se reescribe como complejo simplicial abstracto de la siguiente manera

$$L = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$$

Para describir un complejo simplicial abstracto basta enlistar los simplejos de  $L$  que no tienen supercaras, ya que por definición todos los subconjuntos de éstos también pertenecen a  $L$ . De manera que si  $L$  es como en 3 del Ejemplo 1.6, entonces éste se describe con  $L = \{\{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$ .

**Definición 1.7.** Un **isomorfismo** entre dos complejos simpliciales abstractos  $L$  y  $L'$ , es un función biyectiva  $f$  de los vértices de  $L$  en los vértices de  $L'$  tal que  $\{y_0, y_1, \dots, y_l\} \in L$  si y sólo si  $\{f(y_0), f(y_1), \dots, f(y_l)\} \in L'$ . Si existe un isomorfismo entre  $L$  y  $L'$  entonces decimos que  $L$  y  $L'$  son **isomorfos** y escribimos  $L \simeq L'$ .

**Definición 1.8.** Si  $K$  es un complejo simplicial, entonces el **esquema de vértices** de  $K$  es el conjunto de todos los subconjuntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_l\} \subset K^{(0)}$  tales que  $\langle x_0, x_1, \dots, x_l \rangle \in K$ .

Nótese que el esquema de vértices de un complejo simplicial es un complejo simplicial abstracto, ver 3 en Ejemplo 1.6. Veremos que existe una relación estrecha entre los complejos simpliciales y los complejos simpliciales abstractos, para ello necesitamos la siguiente definición.

**Definición 1.9.** Si el complejo simplicial abstracto  $L$  es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial  $K$ , entonces decimos que  $K$  es una **realización geométrica** de  $L$ .

Es claro que si  $K, K'$  son realizaciones geométricas de  $L$ , entonces los esquemas de vértices de  $K$  y  $K'$  son isomorfos. De manera que, módulo isomorfismo, podemos hablar de “**la realización geométrica**” de un complejo simplicial abstracto. El siguiente teorema muestra que siempre existe la realización geométrica de un complejo simplicial abstracto y proporciona una cota para la dimensión en la que podemos encontrar una realización geométrica.

**Teorema 1.10.** *Todo complejo simplicial abstracto de dimensión  $d$  tiene una realización geométrica en  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $L \subset Y$  es un complejo simplicial abstracto de dimensión  $d$  tal que  $L^{(0)} = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  con  $n \geq d$ .

Si  $n \leq 2d + 2$ , entonces utilizando  $f: L^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$  tal que  $f(y_0) = 0$  y  $f(y_i) = e_i$ , construimos  $K$  tal que  $\langle f(y_{j_1}), f(y_{j_2}), \dots, f(y_{j_r}) \rangle \in K \Leftrightarrow \{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r}\} \in S$ . Es sencillo ver que  $K$  es un complejo simplicial y que es una realización geométrica de  $L$  en  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .

Supongamos que  $n > 2d + 2$ . Consideremos una función  $f: L^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$  tal que

$$f(y_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ e_i & \text{si } 1 \leq i \leq 2d + 1, \\ p_i & \text{si } i > 2d + 1 \end{cases}$$

donde  $p_i$  es un punto que no pertenece a ningún subespacio de dimensión  $2d$  generado por subconjuntos de  $\{f(y_0), f(y_1), \dots, f(y_{i-1})\}$  con  $2d + 1$  elementos (se puede conseguir una función así ya que  $L$  tiene una cantidad finita de vértices). De esta manera logramos que todo  $A \subset f(L^{(0)})$  con  $r \leq 2d + 2$  elementos, esté en posición general.

Llamemos  $K = \{\langle f(y_{l_0}), f(y_{l_1}), \dots, f(y_{l_m}) \rangle \mid \{y_{l_0}, y_{l_1}, \dots, y_{l_m}\} \in L\}$ , procedemos a demostrar que  $K$  es un complejo simplicial y por lo tanto, una realización geométrica de  $L$ . Por construcción, es claro que si  $\sigma \in K$  y  $\gamma < \sigma$ , entonces  $\gamma \in K$ . Basta demostrar que la intersección de elementos de  $K$  es un elemento de  $K$ .

Si  $\sigma^l, \tau^s \in K$ , entonces  $l + s \leq 2d + 1$ . Además, si  $f(y_i) \in \sigma - \tau$  es un vértice, entonces  $f(y_i)$  no es combinación lineal de los vértices de  $\tau$ . El caso  $f(y_i) \in \tau - \sigma$  es análogo. Esto muestra que los puntos en  $\sigma \cap \tau$ , conciden con las combinaciones lineales convexas de vértices que pertenecen tanto a  $\sigma$  como a  $\tau$ .  $\square$

Este resultado en particular nos dice que toda gráfica que es el 1-esqueleto de un complejo simplicial (gráfica sin multiaristas y sin lazos) tiene una representación geométrica en  $\mathbb{R}^3$ . De manera que dicha cota no se puede mejorar, pues es bien sabido que existen muchas gráficas que no se pueden representar geoméricamente en  $\mathbb{R}^2$ .

La intuición nos dice que los complejos simpliciales abstractos nos permiten aproximar espacios de datos que no viven en algún  $\mathbb{R}^n$ . Gracias a la relación entre complejos simpliciales y complejos simpliciales abstractos dada por el Teorema 1.10, de ahora en adelante si no hay confusión, no distinguiremos entre éstos.

## 1.2 Propiedades de los complejos simpliciales

Por la manera combinatoria en la que se construyen los complejos simpliciales, éstos tienen propiedades topológicas deseables y que se pueden calcular con facilidad. En esta sección, explicaremos con cierto detalle algunas propiedades de los complejos simpliciales que nos interesarán para construcciones que realizaremos en capítulos posteriores. La primera propiedad se sigue de la siguiente definición:

**Definición 1.11.** Una **filtración** de un complejo simplicial  $K$  es una colección  $K_1, K_2, \dots, K_M$  de subcomplejos de  $K$  que satisface

$$\emptyset \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_M = K.$$

**Propiedad 1** - Todo complejo simplicial de dimensión  $d$  tiene la filtración dada por los  $l \leq d$  esqueletos, es decir, la filtración en  $K$  dada por  $K_1 = K^{(0)}, K_2 = K^{(1)}, \dots, K_M = K^{(d)} = K$ .

Esta propiedad nos brinda una filtración, pero es claro que pueden existir muchas filtraciones de un complejo simplicial.

**Propiedad 2** - Si  $K$  es un complejo simplicial y  $\tau, \gamma \in K$  son tales que  $\gamma^{d-1} < \tau^{d+r}$  con  $r \geq 1$ , entonces existen dos  $(d+r-1)$ -caras  $\sigma, \tilde{\sigma} \in K$  tales que  $\gamma < \sigma < \tau$  y  $\gamma < \tilde{\sigma} < \tau$ .

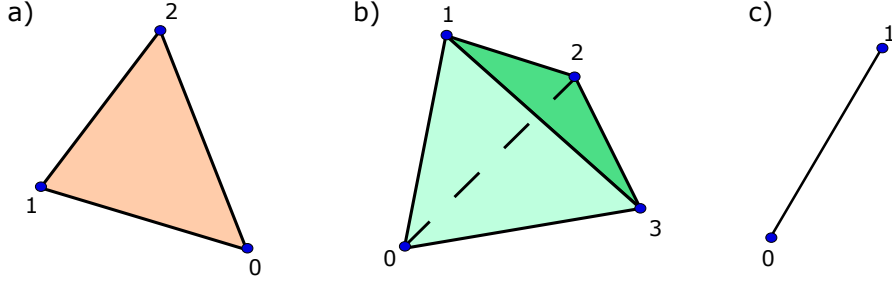
Se puede verificar que esta propiedad es válida para un  $d$ -simplejo. Por lo tanto, también es válida en  $K$ .

**Propiedad 3** - Los simplejos de  $K$  se pueden orientar.

**Definición 1.12.** Supongamos que  $\tau^d \in K$ .

- a) Una **orientación en**  $\tau$  es un orden total de sus vértices módulo una permutación par de ellos.
- b) Un **simplejo orientado** es un simplejo junto con una orientación en él.

Una forma natural de orientar un simplejo  $\tau^d \in K$  es **enumerar sus vértices**, es decir, considerar una biyección  $f: \tau^{(0)} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, d\}$ . Por definición, si  $\zeta: \{0, 1, 2, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, d\}$  es una permutación par, entonces las orientaciones en  $\tau$  definidas por  $f$  y  $\zeta \circ f$  son equivalentes. Obsérvese que todo  $d$ -simplejo tiene dos orientaciones, ya que toda permutación de los números  $0, 1, 2, \dots, d$  es par o impar. Dichas orientaciones se denominan positiva o negativa según la convención que se tome (si  $d = 0$ , entonces una orientación consiste en colocar un signo  $+$  o  $-$  a  $x_0$ ).



**Figura 1.3** – Simplejos orientados, es decir, con un orden en sus vértices.

Si  $\tau^d = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$ , entonces a la **orientación dada por el orden en los subíndices** la denotamos con  $(x_0x_1 \cdots x_d)$ , a la orientación contraria (que se obtiene aplicando una permutación impar al conjunto  $\{0, 1, \dots, d\}$ , por ejemplo la dada por  $(x_1x_0x_2 \cdots x_d)$ ) la denotamos con  $-(x_0x_1 \cdots x_d)$ .

Si  $\tau^d = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$  está orientado con la orientación  $(x_0x_1 \cdots x_d)$  y  $\sigma_i^{d-1} = \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d \rangle$  (la  $d-1$  cara de  $\tau^d$  generada por todos los vértices excepto  $x_i$ ), entonces la orientación en  $\sigma_i$  determinada por  $(-1)^i(x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots x_d)$  está bien definida, *i.e.* si  $\zeta$  es una permutación par de  $\{0, 1, \dots, d\}$ , entonces las orientaciones en  $\sigma$  determinadas por  $(-1)^i(x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots x_d)$  y por  $(-1)^{\zeta(i)}(x_{\zeta(0)} \cdots \hat{x}_{\zeta(i)} \cdots x_{\zeta(d)})$  son equivalentes.

**Definición 1.13.** Si  $\tau^d = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$  está orientado con la orientación  $(x_0x_1 \cdots x_d)$  y  $\sigma_i^{d-1} = \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d \rangle$ , entonces a la orientación sobre  $\sigma_i^{d-1}$  definida por  $(-1)^i(x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots x_d)$  le llamamos la **orientación heredada** de  $\tau^d$ .

Por ejemplo, en el inciso a de la Figura 1.3, el 2-simplejo orientado hereda las siguientes orientaciones en sus aristas (01), (12) y  $-(02)$ . En el inciso c las orientaciones heredadas por los puntos son +1 y -0.

**Definición 1.14.** Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial y  $\sigma^{d-1}, \tau^d, \tilde{\tau}^d$  son caras de  $K$  tales que  $\sigma^{d-1} < \tau^d$  y  $\sigma^{d-1} < \tilde{\tau}^d$ .

- Si  $\tau^d, \tilde{\tau}^d$  están orientados y heredan orientaciones diferentes sobre  $\sigma^{d-1}$ , entonces decimos que ellos están **orientados coherentemente**.
- Si sólo  $\tau^d$  está orientado, entonces a la orientación en  $\tilde{\tau}^d$  tal que hereda en  $\sigma^{d-1}$  la orientación contraria a la que hereda  $\tau^d$ , se le conoce como la **orientación deslizada** de la orientación en  $\tau^d$ .

Nótese que la orientación deslizada sobre  $\tilde{\tau}^d$  se define para hacerla coherente con la orientación en  $\tau^d$ .

Siempre es posible dar orientaciones en los simplejos de un complejo simplicial sin importar que éstas sean coherentes entre sí. Ahora veremos un caso en el que podemos dar una orientación coherente sobre varios  $d$ -simplejos: Supongamos que  $\tau_1^d, \tau_2^d, \dots, \tau_r^d$  son simplejos distintos entre sí tales que  $\tau_1^d$  está orientado y

$$\tau_j^d \cap \tau_i^d = \begin{cases} \sigma_{ij}^{d-1} & \text{si } i = j + 1 \\ \emptyset & \text{si } j \neq i \end{cases},$$

entonces podemos deslizar la orientación de  $\tau_1^d$  sobre toda la cadena  $\tau_2^d, \dots, \tau_r^d$  para definir orientaciones coherentes en todos los  $d$ -simplejos.

En el caso en que  $\tau_r^d \cap \tau_1^d = \sigma_{r1}^{d-1}$ , tal vez no se pueda orientar la cadena de manera coherente, esto depende de la orientación que defina  $\tau_1^d$  sobre sí mismo al deslizar su orientación por toda la cadena.

**Propiedad 4 - Colapsos entre complejos simpliciales.**

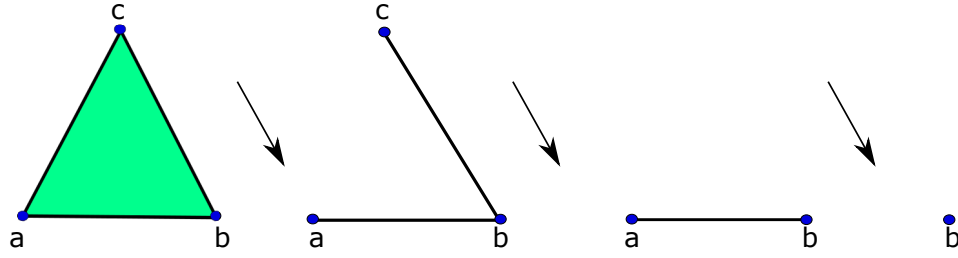
En este caso mas que una propiedad, mencionaremos una relación entre complejos simpliciales que será muy utilizada en el Capítulo 2.

**Definición 1.15.** *Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial.*

- a) *Si  $\tau^d, \sigma^{d-1} \in K$  son tales que  $\sigma^{d-1}$  es cara libre de  $\tau^d$ , entonces decimos que  $K - \{\tau^d, \sigma^{d-1}\}$  se obtiene de  $K$  al **colapsar**  $\tau^d$  a través de  $\sigma^{d-1}$ .*
- b) *Si  $K_1 \subset K$  es un subcomplejo que se obtiene de aplicar un número finito de colapsos en  $K$ , entonces decimos que  $K$  se **colapsa** en  $K_1$  y escribimos  $K \searrow K_1$ .*
- c) *Si  $K_1$  es un complejo simplicial tal que  $K_1 \searrow K$  ó  $K \searrow K_1$ , entonces decimos que  $K_1$  y  $K$  son **simplicialmente homotópicos**.*

*Observaciones.*

1. La relación “simplicialmente homotópicos” es de equivalencia entre complejos simpliciales.
2. Si  $K$  es un complejo simplicial sin caras libres, entonces sobre  $K$  no se pueden hacer colapsos. Un caso particular son los complejos simpliciales que son triangulaciones de una variedad sin frontera.
3. Todo  $d$ -simplejo se colapsa en cualquiera de sus vértices. La Figura 1.4 muestra unos posibles pasos a seguir para colapsar un 2-simplejo.
4. Si  $K_1, K_2$  son simplicialmente homotópicos, entonces tienen grupos de homología isomorfos. Esto se debe a que al colapsar eliminamos un disco que es homológicamente trivial en  $K$ .



**Figura 1.4** – Posibles pasos a seguir para colapsar un 2-simplejo sobre uno de sus vértices.

### 1.3 Complejos de Čech y de Vietoris-Rips

Un nube de datos consiste de un conjunto de  $d + 1$  puntos  $N$  que está contenido en un espacio métrico  $Y$ . Como mencionamos antes, nuestro objetivo es construir complejos simpliciales que de cierta manera aproximen la forma en que los datos están dentro de  $Y$ . En esta sección mostraremos dos métodos para construir filtraciones del  $d$ -simplejo generado por los puntos de  $N$ , estas filtraciones son muy empleadas en la literatura para aproximar la forma de la nube de datos. Cabe mencionar que las filtraciones se construyen utilizando las distancias entre los puntos de  $N$  y por esto necesitamos que  $Y$  sea un espacio métrico.

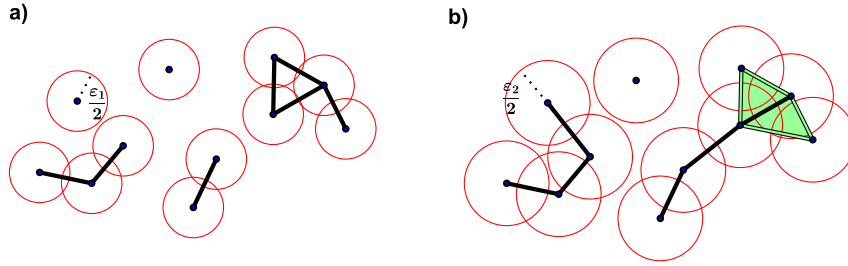
**Definición 1.16.** Si  $N = \{y_0, y_1, \dots, y_d\} \subset Y$  y  $\epsilon > 0$ , entonces el **complejo de Čech** de radio  $\epsilon$ ,  $(\mathcal{C}_\epsilon)$ , es el complejo simplicial (abstracto) cuyos  $m$ -simplejos se corresponden con los subconjuntos  $A \subset N$  tales que  $\#(A) = m$  (la cardinalidad de  $A$ ) y

$$\bigcap_{y_i \in A} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i) \neq \emptyset \quad \text{donde} \quad B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i) = \{p \in Y \mid d(p, y_i) < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Nótese que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño,  $\mathcal{C}_\epsilon = N$  y para  $\epsilon$  suficientemente grande,  $\mathcal{C}_\epsilon$  es isomorfo al esquema de vértices de  $\Delta^d$ . Además, si  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , entonces  $\mathcal{C}_{\epsilon_1}$  es un subcomplejo de  $\mathcal{C}_{\epsilon_2}$ . De manera que tomando  $M$  valores crecientes de  $\epsilon$  tales que  $\mathcal{C}_{\epsilon_M}$ , definimos una filtración de  $\Delta^d$ . La Figura 1.5 muestra los complejos de Čech de una nube de puntos para dos valores distintos de  $\epsilon$ .

El Lema del Nervio [7, Corollary 3] nos dice que para cada  $\epsilon$ ,  $\mathcal{C}_\epsilon$  tiene el tipo de homotopía de  $\cup_{y_i \in N} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i)$ . De manera que  $\mathcal{C}_\epsilon$  es un complejo simplicial que tiene los mismos grupos de homología de la nube de datos cubierta por bolas de radio  $\epsilon/2$ . Como todo  $d$ -simplejo tiene  $2^{d+1}$  caras, entonces el número de simplejos en el complejo de Čech crece de forma exponencial





**Figura 1.5** – Complejos de Čech calculados con dos valores  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ .

con la cardinalidad de  $N$ , por lo que se requiere de mucha memoria en una computadora para almacenarlo.

**Definición 1.17.** Si  $N = \{y_0, y_1, \dots, y_d\} \subset Y$  y  $\epsilon > 0$ , entonces el **complejo de Vietoris-Rips** de radio  $\epsilon$  ( $\mathcal{VR}_\epsilon$ ) es el complejo simplicial abstracto cuyos  $m$ -simplejos se corresponden con los subconjuntos  $A \subset N$  tales que  $\#(A) = m$  y para toda pareja  $y_i, y_j \in A$ ,  $d(y_i, y_j) < \epsilon$ .

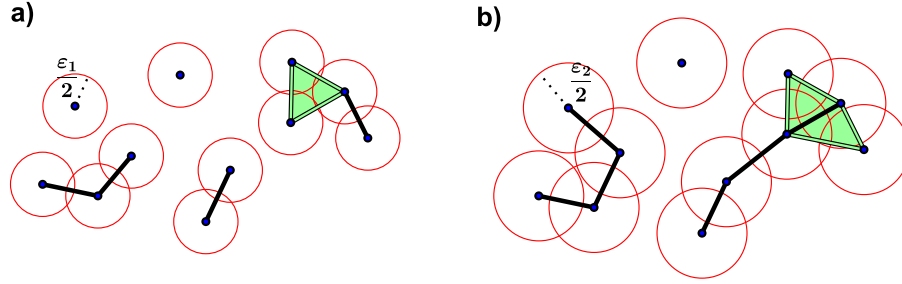
Nuevamente se cumple que  $\mathcal{VR}_\epsilon = N$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, que  $\Delta^d$  es una realización geométrica de  $\mathcal{VR}_\epsilon$  para  $\epsilon$  suficientemente grande y que si  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , entonces  $\mathcal{VR}_{\epsilon_1}$  es un subcomplejo de  $\mathcal{VR}_{\epsilon_2}$ , de manera que nuevamente valores crecientes de  $\epsilon$  definen una filtración de  $\Delta^d$ .

Nótese que si  $\{y_1, \dots, y_m\} \subset Y$  es tal que cualquier pareja de puntos está a distancia menor que  $\epsilon$ , entonces todo el  $m$ -simplejo generado por estos puntos pertenece a  $\mathcal{VR}_\epsilon$ . De manera que el complejo de Vietoris-Rips está determinado por la gráfica  $\mathcal{VR}_\epsilon^{(1)}$ , luego, éste es más sencillo de almacenar en una computadora pues sólo basta almacenar el 1-esqueleto de los simplejos y por lo tanto se requiere menos memoria. La diferencia es que sobre los complejos simpliciales  $\mathcal{VR}_\epsilon$  no aplica el Lema del Nervio. La Figura 1.6 muestra los complejos de Vietoris-Rips de una nube de puntos para dos valores distintos de  $\epsilon$ .

De las definiciones se puede verificar que para un  $\epsilon > 0$  fijo, todo simplejo en  $\mathcal{C}_\epsilon$  es también simplejo de  $\mathcal{VR}_\epsilon$ , por lo que existe un encaje natural  $\mathcal{C}_\epsilon$  en  $\mathcal{VR}_\epsilon$ . El siguiente Teorema nos proporciona un encaje del complejo de Vietoris-Rips al de Čech para diferentes valores de  $\epsilon$ .

**Teorema 1.18.** Si  $N$  es un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^d$  y  $\epsilon > 0$ , entonces se cumple la siguiente cadena de contenciones

$$\mathcal{VR}_\epsilon \hookrightarrow \mathcal{C}_{\epsilon'} \hookrightarrow \mathcal{VR}_{\epsilon'} \quad \text{para todo} \quad \epsilon' \geq \epsilon \sqrt{\frac{2d}{d+1}}$$



**Figura 1.6** – Complejos de Vietoris-Rips calculados con los mismos valores  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  que en la Figura 1.5.

*Demostración.* La demostración que realizaremos aquí se puede consultar en [3, Teorema 2.5].

Basta con probar la primera inclusión, ésta es equivalente a probar la siguiente afirmación “si una colección de puntos en  $\mathbb{R}^d$  es tal que cualesquiera dos puntos de ella están a distancia a lo más  $\epsilon$ , entonces las bolas de radio  $\frac{\epsilon}{2}$  centradas en estos puntos tienen un punto en común”.

Primero probaremos dicha afirmación para un conjunto  $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}$  con  $r \leq d$ . Consideremos la función  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(y) = \max_{0 \leq x_i \leq r} \|x_i - y\|, \quad \text{donde } \|\cdot\| \text{ es la norma euclidea en } \mathbb{R}^d$$

Esta función es positiva y continua, además, si  $\|y\| \rightarrow \infty$ , entonces  $f(y) \rightarrow \infty$ . Luego, existe  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  tal que  $f(y_0)$  es mínimo global de  $f$ .

A los  $x_i$  tales que  $\|x_i - y_0\| = f(y_0)$  los llamaremos puntos críticos. Por ser  $y_0$  mínimo, éste debe estar en la envolvente convexa del conjunto de puntos críticos. Trasladamos  $\hat{x}_i = x_i - y_0$  y reenumeramos los puntos de manera que en el conjunto  $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r\}$ , los primeros  $s + 1 \leq r + 1$  puntos son los críticos. Con estas hipótesis, existe una combinación lineal convexa  $a_0\hat{x}_0 + a_1\hat{x}_1 + \dots + a_s\hat{x}_s = 0$  con al menos uno de los coeficientes distinto de 0. Digamos que  $a_0 \neq 0$  es tal que para todo  $i$ ,  $a_0 \geq a_i$ , entonces

$$-\hat{x}_0 = \sum_{i=1}^s (a_i/a_0)\hat{x}_i \iff -f(y_0)^2 = -\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^s (a_i/a_0)\hat{x}_0 \cdot \hat{x}_i.$$

Al menos uno de los términos del lado derecho satisface que  $(a_i/a_0)\hat{x}_0 \cdot \hat{x}_i \leq -f(y_0)^2/s$ , multiplicando por  $-1$  y usando que  $s \leq r$  y  $a_i/a_0 \leq 1$  tenemos que  $f(y_0)^2/r \leq -\hat{x}_0 \cdot \hat{x}_i$ . Luego, como  $\|\hat{x}_0\|^2 = \|\hat{x}_i\|^2 = f(y_0)^2$  tenemos que

$$f(y_0)^2\left(1 + \frac{2}{d} + 1\right) \leq \|\hat{x}_0\|^2 - 2\hat{x}_0 \cdot \hat{x}_i + \|\hat{x}_i\|^2 = \|\hat{x}_0 - \hat{x}_i\|^2 = \|x_0 - x_i\|^2 \leq \epsilon^2,$$

por lo tanto  $f(y_0) \leq \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{2d}{d+1}} \leq \frac{\epsilon'}{2}$ . Concluimos que  $y_0$  pertenece a las bolas de radio  $\frac{\epsilon'}{2}$  centradas en los puntos  $x_i$ .

De esta manera concluimos que el resultado es válido para un conjunto de a lo más  $d + 1$  puntos. En el caso general, el resultado se sigue pensando a  $\{B_{\frac{\epsilon'}{2}}(x_i)\}$  como una familia de conjuntos convexos y utilizando este caso y el conocido Teorema de Helly<sup>1</sup>.  $\square$

Es sencillo verificar que en el triángulo equilátero con vértices en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , se alcanza la cota mencionada en este Teorema. De manera que en general esta cota no puede ser mejorada.

## 1.4 Complejos CW

En esta sección proporcionamos las definiciones y algunas observaciones sencillas sobre complejos CW. Estos espacios son más generales que los complejos simpliciales y se utilizarán en el Capítulo 2 para construir el “Complejo de Morse” con ayuda de una función de Morse discreta. Cabe mencionar que aquí sólo proporcionamos la definición de complejo CW y no una introducción detallada a la teoría de estos espacios, el lector interesado en un estudio más extenso de la teoría de complejos CW puede consultar [4].

Aquí denotaremos con  $\mathbb{D}^n$  al disco cerrado  $n$  dimensional  $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| \leq 1\}$  y con  $\mathbb{S}^n$  a la  $n$  esfera  $\{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$ . Es sabido que  $\mathbb{S}^{n-1}$  es la frontera de  $\mathbb{D}^n$  y que el interior de  $\mathbb{D}^n$ ,  $\text{int}(\mathbb{D}^n)$ , es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

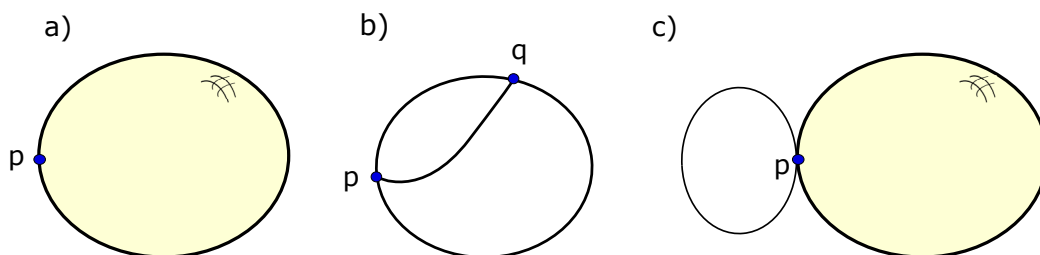
Para definir un complejo CW, necesitaremos de la siguiente definición:

**Definición 1.19.** *Si  $X$  es un espacio topológico y  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  es continua, entonces decimos que el espacio  $X \cup_f \mathbb{D}^n = (\mathbb{D}^n \sqcup X) / x \sim f(x)$  se obtiene **pegando una  $n$ -célula** a  $X$  y a  $f$  le llamamos **función de pegado**. Al subconjunto  $f(\mathbb{S}^{n-1}) \cup \text{int}(\mathbb{D}^n) \subset X \cup_f \mathbb{D}^n$  lo denotamos con  $\sigma^n$  (omitiremos la  $n$  si no hay confusión) y lo llamamos  **$n$ -célula**.*

Por definición se sigue que la función  $\phi$  dada por la composición de la inclusión  $\mathbb{D}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n \sqcup X$  y la proyección cociente  $\mathbb{D}^n \sqcup X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^n$  es homeomorfismo en  $\text{int}(\mathbb{D}^k)$  y su restricción a  $\mathbb{S}^{n-1}$  es igual a  $f$ , a dicha función se le conoce como **la función característica** de  $\sigma$ . Al conjunto  $\phi(\text{int}(\mathbb{D}^n)) \subset X \cup_f \mathbb{D}^n$  le llamamos la  **$n$ -célula abierta** y la denotamos con  $\text{int}(\sigma^n)$ . A continuación se mencionan algunos ejemplos:

---

<sup>1</sup>**Teorema de Helly** - Si  $\mathcal{F}$  es una familia de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$  tal que cualesquiera  $d + 1$  de ellos tienen un punto en común, entonces todos los conjuntos de  $\mathcal{F}$  tienen un punto en común.



**Figura 1.7** – Algunos ejemplos de CW complejos. En a), al punto  $p$  le pegamos una 2-célula, en b), le pegamos una 1-célula al círculo en los puntos  $p$  y  $q$ , por último en c), pegamos una 2-célula al círculo mediante de una función constante.

**Ejemplo 1.20.** *Pegados de  $n$ -células en algunos espacios.*

1. Pegar una 0-célula a un espacio topológico  $X$  consiste sólo en marcar un punto de  $X$ .
2. Pegar una 1-célula a un espacio topológico  $X$  consiste en pegar un segmento a  $X$  por sus extremos. Ver Figura 1.7.
3. Si  $X = \mathbb{D}^2$ , entonces al pegar a  $X$  una 2-célula por la identidad en las fronteras obtenemos  $\mathbb{S}^2$ .
4. Si  $X = \{q\}$ , entonces al pegarle una  $n$ -célula a  $X$  obtenemos a  $\mathbb{S}^n$  para todo  $n$ . Ver Figura 1.7.

Ahora estamos listos para la definición de complejo CW.

**Definición 1.21.** Un **complejo CW de dimensión  $n$**  es un espacio topológico  $X$  construido de la siguiente manera

1.  $X^0 \subset X$  es un conjunto no vacío y finito de puntos al que llamaremos el 0-esqueleto de  $X$ .
2.  $X^k$  se obtiene de  $X^{k-1}$  pegando un número finito  $I_k$  de  $k$ -células, es decir,  $X^k = (\bigcup_{i \in I_k} \mathbb{D}_i^k \sqcup X^{k-1})/x \sim f_i(x)$  con  $f_i: \mathbb{S}_i^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$  para toda  $i \in I_k$ . A  $X^k$  le llamamos el  $k$ -esqueleto de  $X$ .
3. Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $k \geq n$ ,  $X^k = X$ .

*Observaciones.* Supongamos que  $X$  es un complejo CW y que  $\sigma^k \subset X$  es una  $k$ -célula.

1. Existe una función característica para  $\sigma^k$ , ver Definición 1.19.

2.  $X$  es unión disjunta de células abiertas, para verificar esto basta tomar  $\phi(\text{int}(\mathbb{D}^n))$  para cada  $n$ -célula de  $X$ .
3. Todo complejo CW  $X$  tiene asociado un conjunto  $|X|$  que es la unión de las células de  $X$ , a dicho conjunto le llamamos el espacio subyacente de  $X$ .

**Proposición 1.22.** *Si  $X$  es un espacio topológico y  $K$  es una estructura de complejo simplicial (triangulación) en él, entonces  $K$  también determina una estructura de complejo CW en  $X$ . El recíproco es falso.*

*Demostración.* Por definición, todo  $d$ -simplejo de  $K$  se obtiene pegando una  $d$ -célula  $\sigma$  en  $K^{(d-1)}$  mediante un homeomorfismo en su frontera, como todo homeomorfismo es en particular una función continua, concluimos que  $K$  también es una estructura de complejo CW.

En 4 del Ejemplo 1.20 se muestra un caso donde el recíproco es falso.  $\square$



## Capítulo 2

# Teoría de Morse discreta

La Teoría de Morse clásica ha sido muy utilizada para el entendimiento de la topología de variedades diferenciables [5], con ella se han probado resultados muy fuertes que ayudan a comprender la estructura topológica de una variedad diferenciable. Por ello, es natural buscar una teoría análoga para espacios discretos como los complejos simpliciales y los complejos CW. En 1998, Robin Forman en el trabajo “Morse Theory for Cell Complexes” [6], desarrolló una Teoría de Morse combinatoria para complejos CW con la que prueba varios resultados análogos a los resultados clásicos de Teoría de Morse en variedades diferenciables. A partir de su publicación, la Teoría de Morse discreta de Forman ha sido utilizada para calcular grupos de homología, homología persistente y para mejorar algoritmos existentes para el análisis topológico de datos ([12], [13], [14]). El objetivo de este capítulo es brindar una introducción general a la Teoría de Morse discreta (TDM) de Forman pero sólo para complejos simpliciales.

Los temas que tratamos en este capítulo están divididos en siete secciones de la siguiente manera: En la Sección 1 proporcionamos las definiciones de función de Morse en un complejo simplicial, de simplejo crítico y mostramos algunos ejemplos. En la Sección 2 probamos tres propiedades sencillas de las funciones de Morse en complejos simpliciales. En la Sección 3 se demuestra el Teorema Principal de la TMD, éste nos dice que los grupos de homología de un complejo simplicial dependen sólo de los simplejos críticos de una función de Morse discreta en él. En Sección 4 definimos el campo gradiente asociado a una función de Morse discreta, los caminos gradiente y se menciona un resultado que caracteriza a los caminos gradiente. En la Sección 5, se construye el Complejo de Morse asociado a una función de Morse discreta y se muestran algunos ejemplos. En la Sección 6 se muestra cómo podemos ayudarnos de la teoría de Morse discreta para calcular la homología persistente de una nube de datos. Por último, en la Sección 7 se

mencionan referencias recientes que muestran como la TMD es un tema de interés actual tanto para las aplicaciones como para la investigación.

Cabe señalar que por simplicidad, nosotros sólo daremos las definiciones y probaremos los resultados de la TDM para complejos simpliciales. El lector interesado puede consultar [6] para una exposición de los resultados sobre complejos CW.

## 2.1 Definiciones y ejemplos

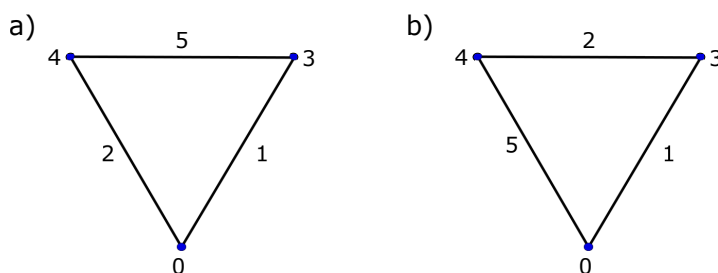
En esta sección introductoria se definen los conceptos de función de Morse discreta y de simplejo crítico y se muestran algunos ejemplos para ilustrar dichas definiciones.

**Definición 2.1.** Si  $K$  es un complejo simplicial y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces decimos que  $f$  es una **función de Morse Discreta (FMD)** si para toda  $\alpha^d \in K$  se cumple<sup>1</sup>

$$1. \#\{\beta^{d+1} > \alpha^d \mid f(\beta^{d+1}) \leq f(\alpha^d)\} \leq 1$$

$$2. \#\{\gamma^{d-1} < \alpha^d \mid f(\gamma^{d-1}) \geq f(\alpha^d)\} \leq 1$$

De manera que si  $f$  es de Morse y  $f(\alpha) = c$ , entonces a lo más una supercara de  $\alpha$  tiene imagen menor o igual que  $c$  y a lo más una cara de  $\alpha$  tiene imagen mayor o igual que  $c$ , ver Figura 2.1. La idea general es que las funciones de Morse discretas asignan números mayores a simplejos de dimensión mayor.



**Figura 2.1** – Funciones discretas en el triángulo. En esta figura las imágenes de los simplejos corresponden a las etiquetas que éstos tienen. La función en a) es una FMD y la de b) no es de Morse, ya que en los simplejos etiquetados con 2 y 3 no se satisface la Definición 2.1.

<sup>1</sup>Aquí  $\#A$  denota la cardinalidad de  $A$ .



Como se hace en la Figura 2.1, siempre expresaremos a una función discreta en un complejo simplicial etiquetando los simplejos con su imagen correspondiente.

**Definición 2.2.** Si  $K$  es un complejo simplicial y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es FMD, entonces decimos que  $\alpha^d \in K$  es un **simplejo crítico de índice  $d$**  si satisface

1.  $\#\{\beta^{d+1} > \alpha^d \mid f(\beta^{d+1}) \leq f(\alpha^d)\} = 0$
2.  $\#\{\gamma^{d-1} < \alpha^d \mid f(\gamma^{d-1}) \geq f(\alpha^d)\} = 0$

Es decir, si  $f(\alpha^d) = c$ , entonces no existen  $(d+1)$ -supercaras de  $\alpha^d$  con imagen menor o igual a  $c$  ni  $(d-1)$ -caras de  $\alpha^d$  con imagen mayor o igual a  $c$ . Nótese que en la función que se muestra en el inciso *a* de la Figura 2.1, el 0-simplejo etiquetado con 0 es crítico y el 1-simplejo etiquetado con 5 también es crítico. A los simplejos que no son críticos los llamamos **simplejos regulares**. Las siguientes observaciones se siguen de las definiciones 2.1 y 2.2:

1. *Todo complejo simplicial  $K$  admite una FMD* - La función discreta  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha) = \dim(\alpha)$ , es una FMD. Se puede verificar que en esta función todos los simplejos de  $K$  son críticos.
2. *Existe semejanza entre los puntos críticos de una FMD  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  y los puntos críticos de una función de Morse diferenciable en una variedad* - Supongamos que  $\alpha^0$  es un punto crítico de  $f$ . Nótese que todas las supercaras de  $\alpha$  tienen imagen mayor, por lo tanto  $\alpha$  es un mínimo local. Si  $\gamma^1$  es simplejo crítico de  $f$ , entonces las supercaras de  $\gamma$  tienen imagen mayor y sus caras (vértices) tienen imagen menor, por lo tanto  $\gamma$  se ve como un punto silla con dos direcciones en las que  $f$  decrece. Justo como sucede con una singularidad de índice 1 en una función de Morse diferenciable. Siguiendo Es sencillo convencerse de que la misma analogía es válida en todas las dimensiones.
3. *El mínimo de  $f$  se alcanzan en los vértices* - Esto se debe a que si  $d > 0$ , entonces todo simplejo  $\alpha^d$  tiene al menos dos  $d-1$  caras y por definición de FMD, alguna de ellas tiene imagen menor que  $\alpha$ . Concluimos que siempre habrá puntos críticos de índice 0.
4. *Si  $|K|$  es una variedad cerrada de dimensión  $n$  y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD, entonces el máximo de  $f$  ocurre en un  $n$ -simplejo* - Como  $K$  es triangulación de una variedad, todo  $d$ -simplejo con  $d < n$  es cara de

al menos dos  $(d + 1)$ -simplejos, por definición de FMD alguno de ellos tiene imagen mayor. Concluimos que siempre hay puntos críticos de índice  $n$ .

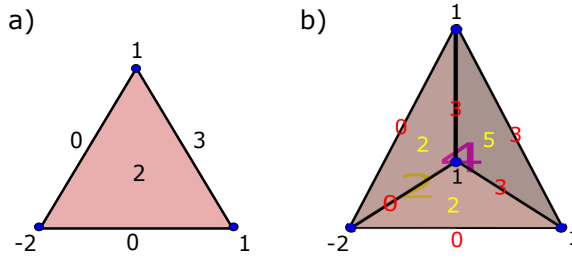
**Ejemplo 2.3.** *Algunas funciones de Morse discretas en complejos simpliciales.*

1. *Función de Morse discreta en  $\Delta^n$  con un sólo simplejo crítico.*

Recordemos que  $\Delta^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1} \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Considerese la función  $\phi_n: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que si  $\sigma^d \in K$ , entonces:

$$\phi_n(\sigma^d) = \begin{cases} 2d - 2 & \text{si } e_1 \in \sigma^d \\ 2d + 1 & \text{si } e_1 \notin \sigma^d \end{cases}$$

Procedemos a demostrar que  $\phi_n$  es una FMD y que  $e_1$  es el único simplejo crítico. Supongamos que  $\sigma^d \neq \{e_1\}$ , hay dos casos a considerar:



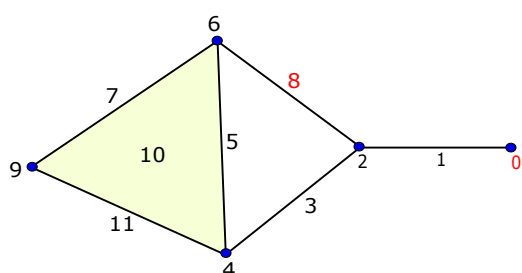
**Figura 2.2** – Funciones  $\phi_2$  y  $\phi_3$  descritas en 1 de Ejemplo 2.3. En el inciso b), se muestra una vista superior de  $\Delta^3$  en el que las imágenes de los vértices están en color negro, las aristas en rojo, las caras en amarillo y el interior de color marrón.

- a)  $\sigma^d = \langle e_1, e_{k_1}, \dots, e_{k_p} \rangle$  - En este caso, la imagen de  $\sigma$  bajo  $\phi_n$  es  $2d - 2$ , las imágenes de sus  $(d - 1)$ -caras que contienen a  $e_1$  son  $2d - 4$  y la imagen de la  $d - 1$  cara que no contiene a  $e_1$  es  $2d - 1$ , por lo tanto tiene imagen mayor. Además, de la definición de  $\phi_n$  es fácil ver que los  $(d + 1)$ -simplejos que tienen como cara a  $\sigma$  (que no existen cuando  $d = n$ ), tiene imagen mayor.
- b)  $e_1 \notin \sigma^d$  - Aquí  $\phi_n(\sigma) = 2d + 1$ . En este caso, las  $(d - 1)$ -caras de  $\sigma$  tienen imagen menor que  $\sigma$  bajo  $\phi_n$  y los  $(d + 1)$ -simplejos que tienen como cara a  $\sigma$  y no contienen a  $e_1$ , tienen imagen mayor que  $\sigma$  bajo  $\phi_n$ . Pero el  $(d + 1)$ -simplejo formado por los vértices de  $\sigma$  y  $e_1$ , tiene imagen menor que  $\sigma$ .

De esta manera concluimos que  $\phi_n$  es una FMD y que  $e_1$  es su único simplejo crítico. La Figura 2.2 muestra las funciones  $\phi_2$  y  $\phi_3$ .

Es claro que podemos realizar esta construcción comenzando en cualquier otro vértice de  $\Delta^n$  y que la construcción también funciona sobre cualquier otro  $n$ -simplejo. Por último, nótese que si restringimos  $\phi_n$  al  $(n-1)$ -simplejo  $\langle e_2, e_3, \dots, e_n \rangle$ , entonces  $\phi_n$  es estrictamente creciente y por lo tanto todo simplejo es crítico.

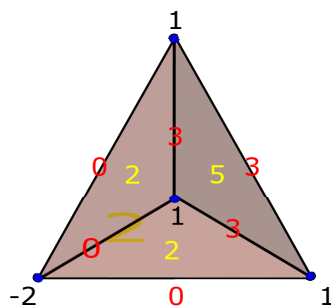
2. Una FMD en un complejo simplicial  $K$  que no es variedad.



**Figura 2.3** – Una FMD en un complejo simplicial de dimensión dos con un 0-simplejo crítico en 0 y un 1-simplejo crítico en 8.

3. Función en  $\mathbb{S}^2$  con dos simplejos críticos.

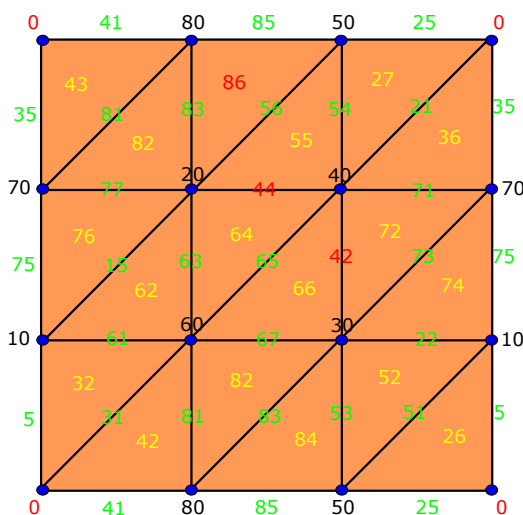
La estructura de tetraedro en la esfera se obtiene como la frontera de  $\Delta^3$ , de manera que si restringimos  $\phi_3$  a la frontera de  $\Delta^3$  obtenemos una FMD en el tetraedro. Dicha función tiene dos simplejos críticos, ver Figura 2.4.



**Figura 2.4** – Restricción de  $\phi_3$  a la frontera de  $\Delta^3$ . En este caso el 0-simplejo  $-2$  y el 2-simplejo 5 son críticos.

4. Función de Morse en el toro  $\mathbb{T}^2$  con 4 simplejos críticos.

En este ejemplo utilizaremos que el toro  $\mathbb{T}^2$  se puede construir pegando las caras opuestas de un cuadrado por traslaciones. Recordemos que al realizar estas identificaciones en un cuadrado, los vértices se identifican en un solo punto. Nos ayudaremos de esto para mostrar una estructura de complejo simplicial y una FMD en  $\mathbb{T}^2$ .



**Figura 2.5** – Identificando las caras opuestas de este cuadrado por traslaciones, obtenemos al toro  $\mathbb{T}^2$ . Los números muestran una FMD en  $\mathbb{T}^2$  con puntos críticos en los simplejos etiquetados con los números rojos.

## 2.2 Propiedades de las funciones de Morse discretas

En esta sección probaremos cuatro propiedades sencillas que tienen las funciones de Morse discretas (FMD) en complejos simpliciales, dichas propiedades serán utilizadas en las demostraciones que realizaremos en la siguiente sección. Además, en la parte final de esta sección proporcionamos la definición de sub-complejos de nivel para una función de Morse discreta.

**Proposición 2.4.** *Si  $K$  es un complejo simplicial,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD y  $\sigma^d \in K$  es un simplejo regular de  $f$ , entonces se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:*

- Existe  $\tau^{d+1} > \sigma^d$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
- Existe  $\gamma^{d-1} < \sigma^d$  tal que  $f(\gamma) \geq f(\sigma)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $d \geq 1$  y que  $\sigma^d$  satisface las dos condiciones. Por la Propiedad 1 de la Sección 1.2, existe  $\tilde{\sigma}^d \neq \sigma$  tal que  $\gamma < \tilde{\sigma} < \tau$ . Como  $f$  es una FMD, se satisface que  $f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$  y  $f(\gamma) < f(\tilde{\sigma})$ , luego se cumple

$$f(\sigma) \leq f(\gamma) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tau) \leq f(\sigma),$$

lo cual es una contradicción. Concluimos que sólo puede ser válida una de las condiciones.  $\square$

**Proposición 2.5.** *Si  $K$  es un complejo simplicial,  $K_1 \subset K$  es un subcomplejo,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD y  $f_1$  es la restricción de  $f$  a  $K_1$ , entonces  $f_1$  es una FMD y los simplejos críticos de  $f$  también son simplejos críticos de  $f_1$ .*

*Demostración.*  $f_1$  satisface las desigualdades de la Definición 2.1 ya que  $K_1$  tiene menos simplejos que  $K$ , por la misma razón se sigue que si  $\sigma \subset K$  es simplejo crítico de  $f$ , entonces también lo es de  $f_1$ .  $\square$

Cabe mencionar que  $f_1$  puede tener más simplejos críticos, en 3 del Ejemplo 2.3 se muestra un caso así.

**Proposición 2.6.** *Si  $K$  es un complejo simplicial y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD, entonces existe una función inyectiva  $\tilde{f}: K \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene los mismos simplejos críticos que  $f$ .*

*Demostración.* Si  $f$  es inyectiva, basta tomar  $\tilde{f} = f$ .

Supongamos que  $f$  no es inyectiva. Si  $Im(f) = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ , entonces hacemos  $2\epsilon = \min_{i,j} |c_i - c_j|$ . Si  $\sigma \in K$  es tal que para todo simplejo  $\beta \in K$ ,  $f(\sigma) \neq f(\beta)$ , entonces definimos  $\tilde{f}(\sigma) = f(\sigma)$ . Si  $\sigma^d, \tau^p$  son tales que  $f(\sigma^d) = f(\tau^p)$  y  $d \leq p$ , entonces definimos  $\tilde{f}(\tau^p) = f(\tau^p) - \frac{\epsilon}{2^m}$  donde  $m \in \mathbb{N}$  varía dependiendo del número de parejas a las que hemos modificado sus imágenes. Por definición, es claro que  $\tilde{f}$  es inyectiva. Para verificar que  $\tilde{f}$  tiene los mismos simplejos críticos que  $f$ , consideremos los siguientes 3 casos:

*Caso I -  $p = d + 1$  y  $\sigma^d < \tau^p$ :* En este caso  $\sigma$  no es simplejo crítico de  $f$ , pues  $\tau$  es una supercara con imagen igual. Nótese que para  $\tilde{f}$ ,  $\tau$  es una supercara cuya imagen es menor que la imagen de  $\sigma$ .

*Caso II -  $\sigma^d$  es crítica y  $\sigma^d < \tau^p$ :* Esto implica que  $p = d + r$  con  $r > 1$ . Por la Propiedad 1 de la Sección 1.2, existen dos  $(d+r-1)$ -simplejos  $\beta, \tilde{\beta}$  tales que  $\sigma < \beta < \tau$  y  $\sigma < \tilde{\beta} < \tau$ , luego, como  $f$  es de Morse se cumple alguna de las desigualdades (o ambas),  $f(\beta) < f(\tau)$  o  $f(\tilde{\beta}) < f(\tau)$ , en cualquier caso se contradice el hecho de que  $\sigma$  es crítica, por lo tanto este caso es imposible que suceda.

*Caso III -  $\sigma^d$  es crítica y no es cara de  $\tau$ :* Por construcción,  $\tilde{f}$  no cambia los valores de ninguna cara ni supercara de  $\sigma$ , por lo tanto  $\sigma$  aún es crítica.

Se puede verificar que esto demuestra el resultado.  $\square$

**Proposición 2.7.** Si  $K$  es un complejo simplicial,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD y  $\gamma^d, \tau^p \in K$  son tales que  $\gamma^d < \tau^p$ , entonces existe  $\sigma^{d+1} \in K$  tal que  $\gamma^d < \sigma^{d+1} \leq \tau^p$  y  $f(\sigma) \leq f(\tau)$ .

*Demostración.* Si  $p = d + 1$ , entonces tomamos  $\sigma = \tau$ .

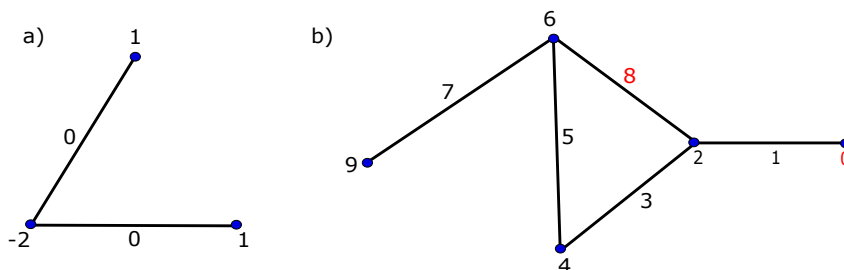
Si  $p = d + r$  con  $r > 1$ , entonces por la Propiedad 1 de la Sección 1.2, existen  $(p + r - 1)$ -simplejos  $\sigma, \tilde{\sigma}$  tales que  $\gamma < \sigma < \tau$  y  $\gamma < \tilde{\sigma} < \tau$ . Por ser  $f$  de Morse,  $f(\sigma) < f(\tau)$  o  $f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$ . La demostración se sigue por inducción utilizando la cara que satisface la desigualdad.  $\square$

Terminamos esta sección con una definición que es la análoga a los conjuntos de nivel para funciones de Morse diferenciables.

**Definición 2.8.** Si  $K$  es un complejo simplicial,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces definimos el subcomplejo de nivel  $c$  como

$$K(c) = \bigcup_{f(\tau) \leq c} \bigcup_{\sigma \leq \tau} \sigma.$$

Nótese que  $K(c)$  es el subcomplejo de  $K$  que tiene todos los simplejos con imagen menor o igual que  $c$  y todas las caras de éstos. En la Figura 2.6 se pueden ver algunos ejemplos de subcomplejos de nivel.



**Figura 2.6** – En a) el subcomplejo de nivel  $K(1)$  de  $\phi_2$ . b) muestra el subcomplejo de nivel  $K(9)$  de la FMD mencionada en 2 del Ejemplo 2.3.

, recordemos que los valores marcados con rojo son los puntos críticos de dicha función.

## 2.3 Teorema principal

De manera análoga al caso de funciones de Morse diferenciables, las funciones de Morse discretas proveen mucha información sobre la topología del complejo simplicial que es su dominio. Esto se muestra claramente en el Teorema Principal de la Teoría de Morse discreta (Teorema 2.11), el cual

será demostrado en esta sección. El lector notará que los resultados que aquí probaremos son análogos a los de Teoría de Morse diferenciable en variedades [5, Cap. 1].

En todos los resultados de esta sección pensaremos que  $K$  es un complejo simplicial y que  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse discreta inyectiva. Como muestra la Proposición 2.6, siempre podemos pedir esta condición a una FMD.

**Lema 2.9.** *Si  $a < b \in \mathbb{R}$  es tal que  $f^{-1}([a, b])$  no tiene valores críticos de  $f$ , entonces  $K(b) \searrow K(a)$  ( $K(b)$  se colapsa en  $K(a)$ , ver Definición 1.15).*

*Demostración.* Realizamos la demostración en dos pasos.

*Paso I - Existe un único simplejo  $\sigma^d$  tal que  $f(\sigma) \in [a, b]$ :*

De la Proposición 2.4 sabemos que se satisface una y sólo una de las siguientes:

- a) Existe  $\tau_0^{d+1} > \sigma^d$  tal que  $f(\tau_0) \leq f(\sigma)$ .
- b) Existe  $\gamma_0^{d-1} < \sigma^d$  tal que  $f(\gamma_0) \geq f(\sigma)$ .

Si se satisface a), entonces  $f(\tau_0) < a$  y por lo tanto  $\sigma \in K(a)$ . Por definición,  $K(a) = K(b)$ .

Si se satisface b), entonces para todo  $\tau^{d+1} > \sigma^d$ ,  $f(\tau) > b$ . De la Proposición 2.7, se sigue que para toda  $\beta^{d+r} > \sigma^d$ ,  $f(\beta) > b$  y por lo tanto  $\sigma \cap K(a) = \emptyset$ . Si  $\gamma \neq \gamma_0$  es tal que  $\gamma < \sigma$ , entonces  $f(\gamma) < a$  y por lo tanto  $\gamma$  y todas sus caras pertenecen a  $K(a)$ . Si  $\tilde{\sigma}^p \in K$  es tal que  $\gamma_0 < \tilde{\sigma}$ , entonces  $f(\tilde{\sigma}) > f(\gamma_0) > b$ . Luego, por la Proposición 2.7, para toda  $\delta \in K$  tal que  $\delta > \gamma_0$ ,  $f(\delta) > b$ . Se sigue que  $\gamma_0 \cap K(a) = \emptyset$  y que  $K(b) = K(a) \cup \{\sigma \cup \gamma_0\}$  con  $\gamma_0$  cara libre de  $\sigma$ , concluimos que  $K(b) \searrow K(a)$ .

*Paso II - Existen varios simplejos en  $f^{-1}([a, b])$ :*

Por ser  $f$  inyectiva, existen  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_l = b$  tales que para toda  $i$ , hay un único simplejo  $\sigma \in f^{-1}([t_i, t_{i+1}])$ . Procediendo análogamente al Paso I, tenemos que para toda  $i$ ,  $K(t_{i+1}) \searrow K(t_i)$ . Por la transitividad de la operación colapsar, es claro que  $K(b) \searrow K(a)$ .  $\square$

**Lema 2.10.** *Si  $\sigma^d \in K$  es simplejo crítico tal que  $\sigma^d \in f^{-1}([a, b])$  y no hay otro simplejo crítico en  $f^{-1}([a, b])$ , entonces  $K(b)$  es homotópicamente equivalente a  $K(a)$  pegándole una  $d$ -célula (ver Definición 1.19).*

*Demostración.* Si  $a', b' \in \mathbb{R}$  son tales que  $a \leq a' < b' \leq b$  y  $\{\sigma\} = f^{-1}([a', b'])$ , entonces por el lema anterior  $K(a') \searrow K(a)$  y  $K(b) \searrow K(b')$  y por lo tanto, basta demostrar que  $K(b')$  es homotópicamente equivalente a  $K(a')$  pegándole una  $d$ -célula.

Como  $\sigma^d$  es crítica, para todo simplejo  $\tau^{d+1} > \sigma^d$ ,  $f(\tau) > b'$ . De la Proposición 2.7, se sigue que si  $\beta \in K$  es tal que  $\beta > \sigma$ , entonces  $f(\beta) > b'$  y por lo tanto  $\sigma \cap K(a') = \emptyset$ . Luego, para todo simplejo  $\gamma^{d-1} \in K$  tal que  $\gamma^{d-1} < \sigma^d$ ,  $f(\gamma) < a'$ , de manera que  $\gamma \in K(a')$ . Concluimos que  $\partial\sigma$  (la frontera de  $\sigma$ ) está contenida en  $K(a')$  y por lo tanto

$$K(b') = K(a') \cup_h \sigma \quad \text{donde} \quad h: \partial\sigma \rightarrow K(a'). \quad \square$$

El Teorema Principal de la Teoría de Morse discreta es el siguiente:

**Teorema 2.11.** *Si  $m_d(f)$  es el número de simplejos críticos de dimensión  $d$  de  $f$ , entonces  $K$  es homotópicamente equivalente a un complejo CW,  $\mathcal{M}_K$ , que tiene exactamente  $m_d(f)$  células de dimensión  $d$ .*

*Demostración.* Se sigue de los Lemas 2.8 y 2.9. □

En las siguientes secciones veremos algunas conclusiones de este teorema, por ahora debemos quedarnos con la idea de que los simplejos críticos de un complejo simplicial determinan el tipo de homotopía de éste.

**Corolario 2.12.** *Si  $K$  es un complejo simplicial de dimensión  $n$  y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD con exactamente dos simplejos críticos, entonces  $|K|$  es homotópicamente equivalente a una esfera de dimensión  $d \leq n$ .*

*Demostración.* Si  $\gamma, \sigma$  son los simplejos críticos de  $f$ , entonces por la Observación 3 de la Sección 2.1, uno de estos simplejos (digamos  $\gamma$ ) debe ser un vértice de  $K$ . Si  $\dim(\sigma) = d$ , entonces por el Teorema 2.11,  $K$  tiene el tipo homotopía de un complejo CW que se obtiene pegando una  $d$ -célula a un punto, por lo tanto  $K$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^d$  (sólo existe una función de  $\partial\mathbb{D}^d$  a un punto). □

**Definición 2.13.** *Decimos que  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función de Morse discreta mínima** si tiene el número mínimo de simplejos críticos que puede tener  $K$ .*

Calculando los grupos de homología de los espacios subyacentes se puede verificar que todas las FMD mencionadas en el Ejemplo 2.3 son mínimas.

## 2.4 Campo gradiente discreto y su flujo

El Teorema 2.11 muestra que el aspecto importante de una función de Morse discreta son sólo sus simplejos críticos y no las imágenes de todos los simplejos, de hecho, las funciones de Morse discretas a menudo son complicadas



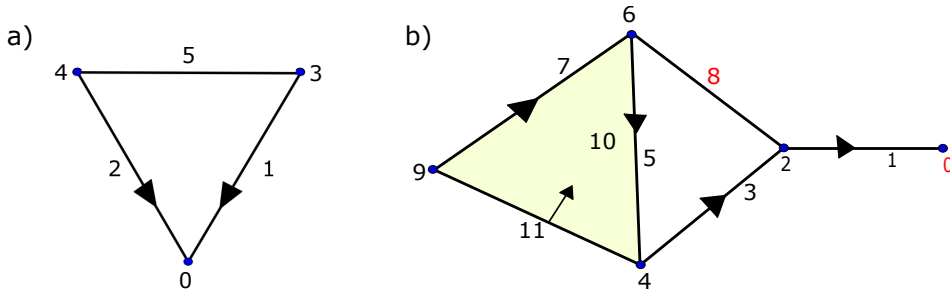
de encontrar, por lo general es más sencillo intentar encontrar los puntos críticos de una FMD sin dar la función de manera explícita. Una manera de hacer esto es mediante el campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta, el cual definiremos en esta sección.

Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD. Usando la Proposición 2.4, podemos particionar a  $K$  en parejas de simplejos y en simplejos aislados de la siguiente manera;  $(\sigma^d, \tau^{d+1})$  es una pareja en la partición (**pareja determinada por  $f$** ) si  $\sigma^d < \tau^{d+1}$  y  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , los simplejos aislados en la partición corresponden a los simplejo críticos de  $f$ .

Si en cada pareja  $(\sigma^d, \tau^{d+1})$  determinada por  $f$  dibujamos una flecha que vaya de  $\sigma^d$  a  $\tau^{d+1}$ , entonces todos los simplejos regulares de  $K$  son puntas o inicios de una flecha y los simplejos críticos de  $f$  no son puntas ni inicios de ninguna flecha.

**Definición 2.14.** Si  $K$  es un complejo simplicial y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD:

- a) Al conjunto  $V_f$  de parejas determinadas por  $f$  le llamamos el **campo gradiente de  $f$** .
- b) Un **camino gradiente de  $f$**  es una sucesión  $(\sigma_0^d, \tau_0^{d+1}), (\sigma_1^d, \tau_1^{d+1}), \dots, (\sigma_r^d, \tau_r^{d+1})$  de parejas determinadas por  $f$  tales que  $\sigma_{i+1}^d < \tau_i^{d+1}$ .



**Figura 2.7** – Ejemplos de campos gradientes que provienen de FMD mencionadas antes.

*Observaciones:* Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD:

1. Si  $(\sigma_k^d, \tau_k^{d+1}), (\sigma_{k+1}^d, \tau_{k+1}^{d+1})$  forman parte de un camino gradiente de  $f$ , entonces  $\sigma_k^d < \tau_k^{d+1} > \sigma_{k+1}^d < \tau_{k+1}^{d+1}$  y sus imágenes cumplen

$$f(\sigma_k) \geq f(\tau_k) > f(\sigma_{k+1}) \geq f(\tau_{k+1}).$$

Concluimos que  $f$  es decreciente en sus caminos gradientes, luego, un camino gradiente se puede pensar como el análogo discreto del flujo del campo  $-\nabla h$  con  $h$  una función de Morse diferenciable.

2. Si  $K(a)$  y  $K(b)$  son subcomplejos de nivel entre los que no hay ningún simplejo crítico, entonces las flechas del campo gradiente en los simplejos de  $K(b) - K(a)$  nos proporcionan la dirección en la que hay que colapsar los simplejos de  $K(b)$  para obtener a  $K(a)$  (Lema 2.9). Como los simplejos críticos de  $f$  no son puntas ni inicios de ninguna flecha, estos no se colapsan en ningún subcomplejo, de manera al realizar los colapsos sobre  $K$  terminaremos sólo con los simplejos críticos de  $f$ .
3. Si  $h: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD que tiene el mismo campo gradiente que  $f$ , entonces por el Teorema 2.11  $f$  y  $h$  proporcionan la misma información sobre la homotopía de  $K$ .

Las Observaciones 1 y 2 muestran que el campo gradiente de una FMD contiene toda la información que necesitamos para aplicarla al cálculo de la homología persistente de una nube de datos. Además, la Observación 3 muestra que si tenemos un complejo simplicial  $K$  y queremos calcular su homología con ayuda de Teoría de Morse discreta, entonces el camino más sencillo es buscar un campo gradiente en  $K$ . Para encontrar un campo gradiente en un complejo simplicial, primero necesitamos encontrar alguna propiedad que caracterize a los campos gradientes discretos sobre un complejo simplicial.

**Definición 2.15.** *Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial.*

- a) Un **campo vectorial discreto** en  $K$  es una colección  $V$  de parejas  $\{\sigma^d, \tau^{d+1}\}$  de simplejos de  $K$  tales que  $\sigma^d < \tau^{d+1}$  y cada simplejo de  $K$  pertenece a lo más una pareja en  $V$ .
- b) Si  $V$  es un campo vectorial discreto en  $K$ , entonces un **V-camino** en  $K$  es una sucesión

$$\sigma_0^d, \tau_0^{d+1}, \sigma_1^d, \tau_1^{d+1}, \dots, \tau_r^{d+1}, \sigma_{r+1}^d$$

tal que para cada  $i = 0, \dots, r$ ,  $\{\sigma_i^d, \tau_i^{d+1}\} \in V$ ,  $\sigma_{i+1}^d \neq \sigma_i^d$  y  $\tau_i^{d+1} > \sigma_{i+1}^d$ .

- c) Si  $V$  es un campo vectorial discreto en  $K$ , entonces decimos que un **V-camino es cerrado** si  $r > 1$  y  $\sigma_0^d = \sigma_{r+1}^d$ .

El siguiente teorema proporciona una caracterización de los campos vectoriales discretos sobre un complejo simplicial que son gradientes de alguna FMD. Aquí no demostraremos este resultado, el lector interesado en la demostración la puede consultar en [6].

**Teorema 2.16.** *Si  $K$  es un complejo simplicial y  $V$  es un campo vectorial discreto sobre  $K$ , entonces  $V$  es el campo gradiente de una función de Morse si y sólo si  $V$  no contiene  $V$ -camino cerrados.*

El lector puede construir más ejemplos de campos gradiente discretos utilizando las funciones de Morse discretas mencionadas en el Ejemplo 2.3.

## 2.5 El Complejo de Morse

El Teorema principal (Teorema 2.11) nos dice que si tenemos un complejo simplicial  $K$  y una función de Morse discreta  $f$  en él, entonces existe un complejo CW,  $\mathcal{M}_K$ , con grupos de homología isomorfos<sup>2</sup> a los de  $K$ . En esta sección, nos ayudaremos de los puntos críticos y los caminos gradiente de  $f$  para construir un complejo de cadenas con el cual podremos calcular la homología de  $\mathcal{M}_K$ . Dicho complejo de cadenas se conoce como el Complejo de Morse.

Supongamos que  $K$  es complejo simplicial de dimensión  $n$  y  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD. Para todo  $d \leq n$ , denotemos con  $C_d(K, \mathbb{Z})$  al grupo abeliano libre generado por los  $d$ -simplejos de  $K$  y con  $\mathcal{M}_d < C_d(K, \mathbb{Z})$  al subgrupo generado por los  $d$ -simplejos críticos de  $f$ . Si  $m_d(f)$  es el número de  $d$ -simplejos críticos, entonces  $\mathcal{M}_d \cong \mathbb{Z}^{m_d(f)}$ .

El siguiente resultado se sigue del Teorema 2.11 y de la teoría de homología para complejos CW.

**Teorema 2.17.** *Para cada  $d \leq n$ , existen mapeos frontera  $\tilde{\partial}_d: \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_{d-1}$  tales que  $\tilde{\partial}_{d-1} \circ \tilde{\partial}_d = 0$  y que el complejo de cadenas*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tilde{\partial}_2} \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$$

satisface que

$$H_d(\mathcal{M}_K, \tilde{\partial}) = \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_d)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_{d+1})} \cong H_d(K, \mathbb{Z})$$

donde  $H_d(K, \mathbb{Z})$  es el  $d$ -ésimo grupo de homología de  $K$ .

Procedemos a presentar la fórmula explícita para los operadores frontera del Complejo de Morse, para ello utilizaremos los caminos gradiente de  $f$  que son los que relacionan a los simplejos críticos.

Escojamos una orientación sobre cada uno de los simplejos de  $K$ , sin importar si la orientación entre simplejos adyacentes es compatible (ver

<sup>2</sup>Espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos.

Propiedad 3 de la Sección 1.2). Supongamos que  $\tau^d \in K$  es célula crítica. Si  $\eta$  es un camino gradiente que comienza en una  $(d-1)$ -cara de  $\tau^d$  y termina en el  $(d-1)$ -simplejo crítico  $\sigma \in K$ , entonces deslizando la orientación de  $\tau$  a través de  $\eta$  definimos una orientación en  $\sigma^{d-1}$ . El siguiente resultado proporciona una fórmula explícita para los operadores frontera.

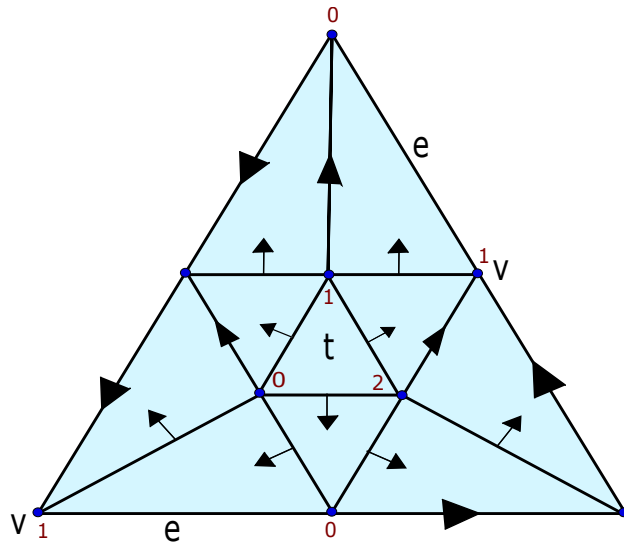
**Teorema 2.18.** *Escojamos una orientación sobre los simplejos de  $K$ . Si  $\tau^d \in K$  es un simplejo crítico de  $f$ , entonces*

$$\tilde{\partial} \tau^d = \sum_{\sigma^{d-1} \text{ críticos}} c_{\sigma, \tau} \sigma, \quad \text{donde } c_{\sigma, \tau} = \sum_{\eta \in \Gamma(\tau, \sigma)} m(\eta).$$

Aquí  $\Gamma(\tau, \sigma)$  es el conjunto de los caminos gradiente que van de las  $(d-1)$ -caras de  $\tau$  al  $(d-1)$ -simplejo crítico  $\sigma$  y  $m(\eta) = \pm 1$ , dependiendo de si  $\eta$  define en  $\sigma$  la orientación escogida o la contraria.

*Demostración:* Ver [6, Sección 8]. □

Como ejemplo, aplicaremos estas ideas para calcular la homología del plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ . Recordemos que  $\mathbb{RP}^2$  se puede obtener como cociente de  $\mathbb{D}^2$  por la función antípoda, en la Figura 2.8 dibujaremos a  $\mathbb{D}^2$  como un triángulo para expresar de manera clara una estructura de complejo simplicial en  $\mathbb{RP}^2$ .



**Figura 2.8** – Campo gradiente en el Plano Proyectivo. En este ejemplo el triángulo  $t$ , la arista  $e$  y el vértice  $v$  son los simplejos críticos. Además, los números en sus vértices muestran las orientaciones escogidas en cada uno de estos simplejos.

De la Figura 2.8 se puede ver que los simplejos  $v, e$  y  $t$  son críticos ya que estos no son punta ni cola de ninguna flecha. Para calcular las imágenes de los operadores frontera, necesitamos analizar los caminos gradiente que comiencen en  $e$  y  $t$  y que terminen en  $v$  y  $e$  respectivamente.

En la Figura 2.8 podemos ver que hay dos caminos gradiente de  $e$  a  $v$  y que uno de ellos es trivial pues tiene cero pasos. El primero de ellos (el trivial) determina una orientación positiva en  $v$  ya que es la punta de  $e$ . El segundo define una orientación negativa en  $v$ , pues se obtiene deslizando el inicio de  $e$ . Tomando la suma de estos signos (como dice el Teorema 2.18), obtenemos que  $\tilde{\partial}(e) = 0$ .

En la Figura 2.8 también podemos ver que existen dos caminos del triángulo  $t$  al segmento  $e$ . Deslizando las orientaciones a través de estos caminos es fácil ver que ambos determinan en  $e$  su orientación original, de manera que  $\tilde{\partial}(t) = 2e$ . Con estos cálculos concluimos que el Complejo de Morse en este caso es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Por lo que los grupos de homología del plano proyectivo son

$$H_0(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

## 2.6 Teoría de Morse discreta y persistencia

En esta sección mostraremos como podemos utilizar la Teoría de Morse discreta para calcular la homología persistente de una nube de datos. Aquí utilizaremos las nociones básicas de la homología persistente, el lector que desconoce el tema puede consultar [10] para una introducción elemental a la homología persistente. La idea general consiste en calcular los complejos CW de los complejos simpliciales obtenidos a través de los complejos de Čech y Vietoris-Rips (ver Sección 1.3) y una función de Morse discreta en ellos, después, encontrar funciones que nos permitan calcular la persistencia de las clases de homología en estos complejos CW.

Supongamos que  $(Y, d)$  es un espacio métrico y  $N = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset Y$  es una nube de datos. Realizaremos los siguientes cuatro pasos para leer la homología persistente de  $N$  por medio de los complejos CW:

**Paso 1** - Calculamos los complejos de Čech y de Vietoris-Rips de  $N$ .

Escogemos valores  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_m$ , de manera que  $\mathcal{C}_{\epsilon_m} = \mathcal{VR}_{\epsilon_m}$  sean isomorfos al esquema de vértices de  $\Delta^n$ . Con estos valores construimos las filtraciones

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \dots \subset \mathcal{C}_m \quad \text{y} \quad \mathcal{VR}_1 \subset \mathcal{VR}_2 \subset \dots \subset \mathcal{VR}_m,$$

donde  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{\epsilon_i}$  y  $\mathcal{VR}_i = \mathcal{VR}_{\epsilon_i}$ . Denotaremos con  $r_i: \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i-1}$  y con  $s_i: \mathcal{VR}_i \rightarrow \mathcal{VR}_{i-1}$  a las inclusiones.

**Paso 2** - Definimos funciones de Morse discretas en los complejos simpliciales que conforman estas filtraciones.

Si  $\min_{i,j} d(x_i, x_j)$  se alcanza en el punto  $x_{i_0} \in N$  y  $h: \mathcal{C}_m \rightarrow \Delta^n$  es un isomorfismo tal que  $h(x_{i_0}) = e_1$ , entonces la función  $\phi_n \circ h: \mathcal{C}_m \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\phi_n$  es la FMD que se calculó en el ejemplo 1 del Ejemplo 2.3, es una FMD que tiene a  $x_{i_0}$  como único punto crítico. Si denotamos con  $h_{\mathcal{C}_i}$  y  $h_{\mathcal{VR}_i}$  a las restricciones de  $\phi_n \circ h$  a los subcomplejos  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{VR}_i$  respectivamente, entonces dichas funciones son FMD's sobre cada elemento de la filtración (ver Proposición 2.5).

**Paso 3** - Calculamos los CW complejos asociados.

Del Teorema 2.11, sabemos que las parejas  $(\mathcal{C}_i, h_{\mathcal{C}_i})$  y  $(\mathcal{VR}_i, h_{\mathcal{VR}_i})$  tienen asociados complejos CW  $\mathcal{M}_i$  y  $\mathcal{N}_i$  que se forman con los simplejos críticos de  $h_{\mathcal{C}_i}$  y  $h_{\mathcal{VR}_i}$  y que tienen grupos de homología isomorfos a los de  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{VR}_i$  respectivamente.

**Paso 4** - Encontramos funciones que calculen la persistencia de la homología.

Por el Teorema 2.11 existen equivalencias homotópicas<sup>3</sup>  $f^i: \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{M}_i$  y  $g^i: \mathcal{VR}_i \rightarrow \mathcal{N}_i$ , éstas definen isomorfismos  $f_{\#}^i$  y  $g_{\#}^i$  entre los grupos de homología de sus dominios y contradominios. Luego, para todas  $i > 1$  y  $k \geq 0$ , se forman los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} H_k(\mathcal{C}_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_{\#}} & H_k(\mathcal{C}_{i-1}, \mathbb{Z}) & & H_k(\mathcal{VR}_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{s_{\#}} & H_k(\mathcal{VR}_{i-1}, \mathbb{Z}) \\ \downarrow f_{\#}^i & & \downarrow f_{\#}^{i-1} & & \downarrow g_{\#}^i & & \downarrow g_{\#}^{i-1} \\ H_k(\mathcal{M}_i, \mathbb{Z}) & & H_k(\mathcal{M}_{i-1}, \mathbb{Z}) & & H_k(\mathcal{N}_i, \mathbb{Z}) & & H_k(\mathcal{N}_{i-1}, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Donde  $r_{\#}$  y  $s_{\#}$  son las funciones definidas por las inclusiones. Las propiedades de inyectividad y suprayectividad de las composiciones

$$f_{\#}^i \circ r_{\#} \circ f_{\#}^{i-1}: H_k(\mathcal{M}_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\mathcal{M}_{i-1}, \mathbb{Z})$$

$$g_{\#}^i \circ s_{\#} \circ g_{\#}^{i-1}: H_k(\mathcal{N}_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\mathcal{N}_{i-1}, \mathbb{Z}),$$

están completamente determinadas por las de  $r_{\#}$  y  $s_{\#}$  respectivamente, de manera que si  $\alpha \in H_k(\mathcal{M}_i, \mathbb{Z})$ , entonces  $f_{\#}^i \circ r_{\#} \circ f_{\#}^{i-1}(\alpha) = 0$  si y sólo si

<sup>3</sup>Ver definición en [8, Pág. 3]

$r_{\#}((f_{\#}^i)^{-1})(\alpha) = 0$  (análogamente sucede con  $g_{\#}^i \circ s_{\#} \circ g_{\#}^{i-1}$ ), por lo que a través de estas funciones podemos leer completamente la homología persistente de  $N$  dada por las filtraciones de Čech y de Vietoris-Rips.

La ventaja de leer la homología persistente de la nube de datos  $N$  a través de la homología de los complejos de Morse de las filtraciones de Čech y de Vietoris-Rips, es que éstos tienen menos simplejos (Teorema 2.11) y por lo tanto el cálculo de la homología es más sencillo y necesita menos memoria de una computadora. El problema de esta construcción es que no tenemos una manera canónica para calcular las funciones  $f_{\#}^i$  y  $g_{\#}^i$ .

## 2.7 Aplicaciones de teoría de Morse discreta

En esta última sección mencionamos referencias en las que se utiliza la teoría de Morse discreta para facilitar cálculos de homología persistente de datos o para análisis de objetos. También mencionamos algunas referencias en las que se desarrolla investigación en TMD.

- **Aplicaciones**

1. V. ROBINS, P. WOOD AND A. SHEPPARD, Theory and algorithms for constructing discrete Morse complexes from grayscale digital images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(8): 1646–1658, 2011.
2. T. LEWINER, H. LOPES AND G. TAVARES, Applications of Forman’s Discrete Morse Theory to Topology Visualization and Mesh Compression. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(5): 499-508, 2004.
3. A. GYULASSY, P. BREMER AND V. PASCUCCI, Computing Morse-Smale Complexes with Accurate Geometry. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 18(12): 2014-2022, 2012.
4. J. REININGHAUS, C. LOWEN AND I. HOTZ, Fast Combinatorial Vector Field Topology, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(10): 1433-1443, 2011.
5. M. KONSTANTIN AND V. NANDA, Morse Theory for Filtrations and Efficient Computation of Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 50(2): 330-353, 2013.
6. O. DELGADO-FRIEDRICH, V. ROBINS AND A. SHEPPARD, Skeletonization and Partitioning of Digital Images Using Discrete Morse

Theory. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 37(3), 654-666, 2015.

7. H. KING, K. KNUDSON AND M. NEŽA Generating Discrete Morse Functions from Point Data. *Experimental Mathematics*, 14(4), 435-444, 2005.

- **Investigación**

1. T. LEWINER, H. LOPES AND G. TAVARES, Optimal discrete Morse functions for 2-manifolds. *Computational Geometry* 26, 221–233, 2003.
2. J. CURRY, R. GHRIST AND V NANDA, Discrete Morse Theory for Computing Cellular Sheaf Cohomology. *Foundations of Computational Mathematics*, 1-23, 2015
3. PATRICIA HERSH, On optimizing discrete Morse functions. *Advances in Applied Mathematics*, 35(3), 294–322, 2005.
4. CROWLEY KATHERINE, Discrete Morse theory and the geometry of nonpositively curved simplicial complexes. (2001) Doctoral Thesis, Rice University, <http://hdl.handle.net/1911/17951>.
5. EMIL SKÖLDBERG, Morse Theory from an Algebraic Viewpoint. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(1), 115–129, 2005.
6. M. JÖLLENBECKA AND V. WELKER, Minimal Resolutions Via Algebraic Discrete Morse Theory. *Memoirs of the American Mathematical Society*, Num. 923, 2009.



# Capítulo 3

## Gráficas de Reeb

Supongamos que  $S$  es una superficie diferenciable compacta y orientable, y  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse definida en  $S$ , entonces la Gráfica de Reeb (definidas por el matemático francés Georges Reeb en [9]) de la pareja  $(S, f)$  es una gráfica a través de la cual podemos leer los números de Betti de  $S$ . De manera que con un objeto discreto de dimensión uno podemos determinar la forma (topología) de un objeto continuo de dimensión dos. Este hecho hace que las gráficas de Reeb sean muy utilizadas en problemáticas donde es necesario identificar formas de objetos en el espacio.

En este capítulo expondremos una adaptación de Gráficas de Reeb a superficies con estructura de complejo simplicial (no necesariamente diferenciables), para esto, es necesario definir la noción de función lineal por pedazos en estas superficies y después definir las Gráficas de Reeb de dichas funciones. Una vez definida la Gráfica de Reeb  $R_f(S)$ , mostraremos que  $R_f(S)$  también determinan los números de Betti de este tipo de superficies. Por último, utilizaremos esta noción de gráfica de Reeb para estudiar la homología persistente de una nube de datos en un espacio métrico.

El contenido de este capítulo está distribuido en seis secciones de la siguiente manera: En la Sección 1 proporcionamos la definición de función lineal por pedazos en un complejo simplicial y mencionamos algunos ejemplos. En la Sección 2 definimos la Gráfica de Reeb de una pareja  $(K, f)$ , donde  $K$  es un complejo simplicial y  $f$  es una función lineal por pedazos en  $K$ , además se mencionan algunas propiedades sencillas de dicha gráfica. En la Sección 3 definimos de superficie triangulada y estudiamos propiedades de las funciones lineales por pedazos en éstas. En la Sección 4 demostramos que las Gráficas de Reeb de superficies trianguladas orientables determinan por completo sus números de Betti 0 y 1. En la Sección 5 mostramos cómo se pueden utilizar las Gráficas de Reeb en el estudio de la homología persistente de una nube de datos. Por último, en la Sección 6 se mencionan varias referencias que

muestran los distintos tipos de problemáticas en las que se han usado las Gráficas de Reeb.

Las referencias principales para el material tratado en este capítulo son [1] y [11].

### 3.1 Funciones lineales por pedazos

Las funciones lineales por pedazos son las funciones naturales sobre los complejos simpliciales, ya que al igual que éstos las funciones lineales por pedazos están determinadas por un número finito de valores. En esta sección se definen las funciones lineales por pedazos, se mencionan propiedades de ellas que serán utilizadas posteriormente y se muestran 3 ejemplos sencillos.

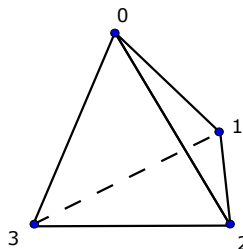
**Definición 3.1.** Si  $K$  es un complejo simplicial, entonces decimos que una función  $f: |K| \rightarrow \mathbb{R}$  es **lineal por pedazos** si para todo  $p \in |K|$ ,

$$f(p) = \sum_{i=0}^m k_i f(x_i)$$

donde  $p \in \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle \in K$  y  $k_0, k_1, \dots, k_m$  son la coordenadas baricéntricas de  $p$  (ver b) en la Definición 1.2). Llamaremos **funciones-PL** a las funciones lineales por pedazos.

Las siguientes propiedades de las funciones-PL se siguen inmediatamente de la definición:

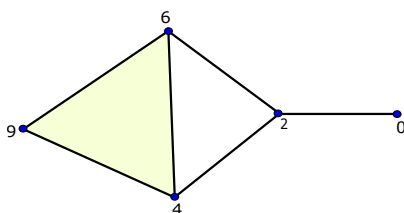
1. Toda función-PL es continua.
2. Una función-PL está determinada por sus valores en  $K^{(0)}$ . Además, si  $f: K^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  es función, entonces extendiendo a  $f$  de manera lineal sobre cada simplejo de  $K$  definimos una función-PL en  $|K|$ .



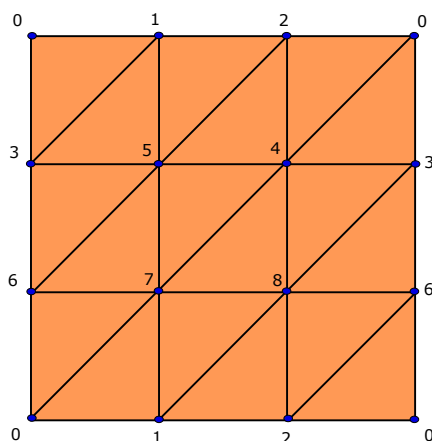
**Figura 3.1** – Extendiendo linealmente sobre las coordenadas baricéntricas podemos definir funciones-PL en el tetraedro y en el tetraedro relleno.

3. Las funciones-PL están definidas para complejos simpliciales contenidos en algún  $\mathbb{R}^n$ . Para definir una función-PL en un complejo simplicial abstracto, basta utilizar una realización geométrica de éste.
4. Las funciones-PL alcanzan su máximo y su mínimo ( $K$  es compacto) en los vértices de  $K$ .
5. Si  $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_l \rangle \in K$  con  $l \geq 1$ , entonces la restricción de  $f$  al interior de  $\sigma$  es diferenciable.

**Ejemplo 3.2.** *En las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se muestran complejos simpliciales con valores en su 0-esqueleto, por la Propiedad 2 sabemos que éstos valores determinan unas únicas funciones-PL en dichos complejos simpliciales.*



**Figura 3.2** – Función-PL en un complejo simplicial de dimensión 2 que no es variedad.



**Figura 3.3** – Función-PL en el Toro  $\mathbb{T}^2$ .

## 3.2 Gráficas de Reeb

En esta sección definimos la gráfica de Reeb de una pareja  $(K, f)$  donde  $K$  es un complejo simplicial y  $f: |K| \rightarrow \mathbb{R}$  es una función-PL, calculamos las gráficas de Reeb de los ejemplos de funciones-PL mencionadas en la sección anterior y por último, mencionamos algunas propiedades generales de las gráficas de Reeb de complejos simpliciales.

Durante toda esta sección  $K$  será un complejo simplicial y  $f: |K| \rightarrow \mathbb{R}$  una función-PL inyectiva.

**Definición 3.3.** *Supongamos que  $t \in \mathbb{R}$ .*

- a) *A  $f^{-1}(t) \subset |K|$  le llamamos el **conjunto de nivel  $t$** .*
- b) *A las componentes conexas de  $f^{-1}(t)$  les llamamos **contornos de nivel  $t$** .*
- c) *Decimos que  $t$  es **valor crítico** si para todo  $\epsilon > 0$ , se cumple que el número de contornos en  $f^{-1}(t - \epsilon)$  es distinto que el número de contornos en  $f^{-1}(t + \epsilon)$ .*

Para definir la gráfica de Reeb de la pareja  $(K, f)$ , utilizaremos la relación de equivalencia  $\sim$  definida en  $Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in K, f(x) \in \mathbb{R}\}$  de la siguiente manera:  $(x, f(x)) \sim (y, f(y)) \iff f(x) = f(y) = l$  y  $x, y$  pertenecen al mismo contorno de  $f^{-1}(l)$ .

**Definición 3.4.** *Al cociente  $R_f(K) = Gr(f)/\sim$  le llamamos la **Gráfica de Reeb de la pareja  $(K, f)$** . Los vértices de  $R_f(K)$ , son los puntos determinados por los contornos  $\alpha \in f^{-1}(t)$  tales que  $t$  es valor crítico y en dicha componente conexa cambia el número de contornos de  $f^{-1}(t)$ .*

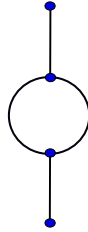
Si  $\phi: |K| \rightarrow R_f(K)$  es la proyección al cociente, entonces por la propiedad universal existe una única  $\pi: R_f(K) \rightarrow \mathbb{R}$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow \phi & \nearrow \pi & \\ R_f(K) & & \end{array}$$

De manera que si conocemos la forma (topología) de los conjuntos de nivel, entonces podemos construir a  $K$  usando la gráfica de Reeb  $R_f(K)$ .

**Ejemplo 3.5.** *Procedemos a calcular las gráficas de Reeb de los ejemplos mencionados en la Sección 3.1.*

1. La gráfica con 2 vértices y una arista entre ellos es la gráfica de Reeb de cualquier función-PL (inyectiva) sobre el tetraedro (en el ejemplo 1 del Ejemplo 3.2 la sección anterior se muestra una función-PL en el tetraedro). Cabe mencionar que obtenemos la misma gráfica independientemente de si el tetraedro está relleno o no.
2. La Figura 3.4 muestra la gráfica de Reeb de la pareja  $(K, f)$  mencionada en el Ejemplo 2 de la sección anterior.
3. La Gráfica de Reeb de la función-PL en el toro  $\mathbb{T}^2$  mencionada en el ejemplo 3 de la sección anterior se muestra en la Figura 3.4. Nótese que dicha gráfica es la misma para este caso y el anterior.



**Figura 3.4** – Gráfica de Reeb de las parejas  $(K, f)$  y  $(\mathbb{T}^2, f)$  de los ejemplos 2 y 3 en la sección anterior.

La gráfica de Reeb de un complejo simplicial  $K$  nos permitirá leer ciertas características de  $K$ , a continuación mencionamos algunas propiedades de  $K$  que se pueden obtener de una gráfica de Reeb  $R_f(K)$  y viceversa. Estas propiedades se pueden consultar en [1].

1. Si  $K$  es de dimensión 1, entonces  $|K|$  es homeomorfo a  $|R_f(K)|$ . Aún más, como complejo simplicial  $R_f(K)$  es igual a  $K$  sin considerar los vértices de grado dos que no son máximos ni mínimos locales de  $f$ .
2.  $\phi$  no junta componentes, por lo tanto  $\beta_0(R_f(K)) = \beta_0(K)$ .
3. La preimagen bajo  $\phi$  de un lazo (1-ciclo no trivial) en  $R_f(K)$  es no contraíble en  $|K|$ , de manera que  $\beta_1(R_f(K)) \leq \beta_1(K)$ .
4. Para todo  $l > 1$ ,  $\beta_l(R_f(K)) = 0$ . De manera que  $R_f(K)$  está determinada por  $K^{(2)}$ .
5. Si  $|K|$  es contraíble, entonces  $R_f(K)$  es un árbol. En 1 del Ejemplo 3.5 se muestra un caso donde el inverso es falso.

### 3.3 Superficies trianguladas

Es sabido que si  $S$  es una superficie compacta y orientable, entonces ésta está determinada por su primer número de Betti  $\beta_1(S)$ . Conociendo este hecho imaginemos la siguiente situación: Supongamos que  $S$  es una superficie con estructura de complejo simplicial de la cual sólo conocemos sus vértices. Si definimos una función  $f: S^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  (que determina una función-PL en  $S$ ) tal que  $\beta_1(R_f(S)) = \beta_1(S)$ , entonces  $f$  nos permitiría identificar completamente a la superficie  $S$ . En las siguientes dos secciones mostramos que cualquier función-PL en una superficie con estructura de complejo simplicial nos permiten leer el primer número de Betti de ésta. Para ello necesitaremos definir las superficies trianguladas y estudiar las propiedades de las funciones-PL en ellas. En esta sección realizaremos estas tareas y mostramos algunos ejemplos.

**Definición 3.6.** *Decimos que un complejo simplicial  $S$  de dimensión 2 es una **superficie triangulada** si toda arista de  $S$  tiene dos supercaras y todo vértice tiene una vecindad en  $|S|$  que es homeomorfa al disco  $\mathbb{D}^2$ .*

**Ejemplo 3.7.** *Algunos ejemplos de superficies trianguladas son:*

1.  $S$  la frontera del tetraedro. En este caso  $|S| = \mathbb{S}^2$ , cabe mencionar que esta triangulación de  $\mathbb{S}^2$  es la que tiene el menor número de simplejos posible.
2.  $S$  la frontera del octaedro. Nuevamente  $|S|$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$ .
3. La Figura 2.5, muestra una superficie triangulada cuyo espacio subyacente es homeomorfo al toro  $\mathbb{T}^2$ .
4. La Figura 2.8, muestra una superficie triangulada cuyo espacio subyacente es homeomorfo al Plano Projectivo  $\mathbb{RP}^2$ .

En lo que resta de esta sección mostraremos que las funciones-PL sobre superficies trianguladas tienen propiedades sencillas e intuitivas, para ello utilizaremos la definición del link de un vértice en una superficie triangulada.

**Definición 3.8.** *Supongamos que  $S$  es una superficie triangulada y que  $v \in S$  es un vértice.*

- a) La **estrella de  $v$**  ( $St(v)$ ) es el conjunto de las supercaras de  $v$ , es decir,

$$St(v) = \{\tau \in S \mid v \leq \tau\}.$$

b) El **link de  $v$**  ( $Lk(v)$ ) es el conjunto de simplejos en  $St(v)$  que no son super caras de  $v$ , es decir,

$$Lk(v) = \{\tau \in St(v) \mid \tau \cap v = \emptyset\}.$$

De la definición de superficie triangulada se puede verificar que la estrella de un vértice siempre es un disco que se obtiene como unión de triángulos pegados a través de sus aristas, ver Figura 3.5. Además, el link de un vértice siempre es un polígono con tantos lados como triángulos hay en la estrella de dicho vértice.

**Definición 3.9.** Supongamos que  $S$  es superficie triangulada,  $f: S^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  es función inyectiva y  $v \in S$  es un vértice.

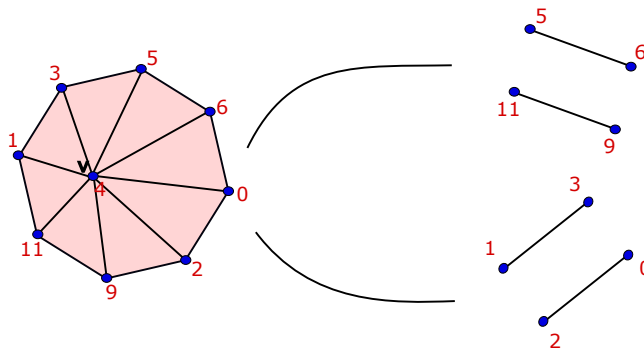
a) El **link superior de  $v$**  ( $Lk_f^+(v)$ ), es el conjunto

$$\{v_i \in Lk(v) \mid f(v_i) > f(v)\} \cup \{\langle v_j, v_l \rangle \in Lk(v) \mid f(v_j), f(v_l) > f(v)\}.$$

b) El **link inferior de  $v$**  ( $Lk_f^-(v)$ ), es el conjunto

$$\{v_i \in Lk(v) \mid f(v_i) < f(v)\} \cup \{\langle v_j, v_l \rangle \in Lk(v) \mid f(v_j), f(v_l) < f(v)\}.$$

Es decir,  $Lk_f^+(v)$  ( $Lk_f^-(v)$ ) es el conjunto de vértices vecinos de  $v$  que bajo  $f$  tienen imagen mayor (menor) que  $v$  junto con las aristas entre dichos vértices. Análogamente se definen la estrella superior ( $St^+(v)$ ) y la estrella inferior ( $St^-(v)$ ) de un vértice  $v$ . La Figura 3.5 muestra un ejemplo de un vértice en el que calculamos su link superior y su link inferior.



**Figura 3.5** – Del lado izquierdo se muestra la estrella del vértice  $v$  y una función-PL en ella. El link de  $v$  es el octágono que es frontera de dicha estrella. En la parte superior del lado derecho se muestra el link superior de  $v$  y en la parte inferior el link inferior de  $v$ .

Si  $S$  es una superficie triangulada,  $f: S^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  es inyectiva y  $v \in S$  es un vértice, entonces sólo existen las siguientes tres posibilidades para las cardinalidades de  $Lk_f^+(v)$  y  $Lk_f^-(v)$ ,

1.  $\#Lk_f^+(v) = 1$  y  $\#Lk_f^-(v) = 0$ .
2.  $\#Lk_f^+(v) = 0$  y  $\#Lk_f^-(v) = 1$ .
3.  $\#Lk_f^+(v) = \#Lk_f^-(v) > 0$ .

**Definición 3.10.** *Supongamos que  $S$  es superficie triangulada,  $f: S^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  es función inyectiva y  $v \in S$  es un vértice.*

- a)  $v$  es **máximo** si  $\#Lk_f^+(v) = 1$  y  $\#Lk_f^-(v) = 0$ .
- b)  $v$  es **mínimo** si  $\#Lk_f^+(v) = 0$  y  $\#Lk_f^-(v) = 1$ .
- c)  $v$  es **regular** si  $\#Lk_f^+(v) = \#Lk_f^-(v) = 1$ . En este caso, al número  $f(v) \in \mathbb{R}$  le llamamos **valor regular**.
- b)  $v$  es **punto silla o punto crítico no degenerado** si  $\#Lk_f^+(v) = \#Lk_f^-(v) = 2$ . En este caso, al número  $f(v) \in \mathbb{R}$  le llamamos **valor crítico**.
- d)  $v$  es **crítico** si  $\#Lk_f^+(v) = \#Lk_f^-(v) > 2$ .

Esta definición muestra las similitudes que existen entre los puntos críticos de una función diferenciable en superficies diferenciables y los puntos críticos de una función-PL en superficies trianguladas. Ahora procedemos a definir las funciones de Morse lineales por pedazos en superficies trianguladas. Cabe mencionar que los resultados que probaremos aquí son válidos para cualquier función-PL, pero los ejemplos y la mayoría de nuestras pruebas se realizarán sólo para funciones de Morse lineales por pedazos.

**Definición 3.11.** *Si  $S$  es una superficie triangulada y  $f: |S| \rightarrow \mathbb{R}$  es función-PL tal que su restricción a  $S^{(0)}$  es inyectiva, entonces decimos que  $f$  es **función de Morse lineal por pedazos** si los vértices de  $S$  son puntos regulares, máximos, mínimos, o puntos silla de  $f$ . Denotaremos con **FM-PL** a una función de Morse lineal por pedazos.*

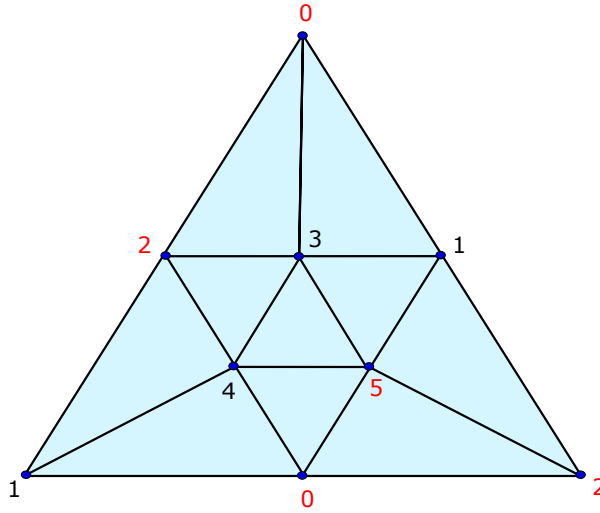
**Ejemplo 3.12.** *Algunos ejemplos de funciones de Morse-PL son:*

1. Si  $T$  y  $O$  son el tetraedro y el octaedro respectivamente, entonces cualesquiera funciones inyectivas en  $T^{(0)}$  y en  $O^{(0)}$  definen FM-PL en  $|T|$  y  $|O|$  respectivamente.



2. La Figura 3.3 muestra una FM-PL en el toro  $\mathbb{T}^2$  con mínimo en 0, máximo en 8 y puntos silla en 6 y 2.
3. La Figura 3.6 muestra una FM-LP en el Plano Proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ .
4. La Figura 3.7 muestra la estrella de un punto y una función-PL en ella que no es una FM-PL. En este caso falla que  $\#Lk_f^+(v) = \#Lk_f^-(v) = 3$ .

Nótese que si  $S$  es una superficie triangulada tal que para todo  $v \in S$ ,  $Lk(v) \leq 5$ , entonces toda función en  $S^{(0)}$  define una FM-PL en  $|S|$ .

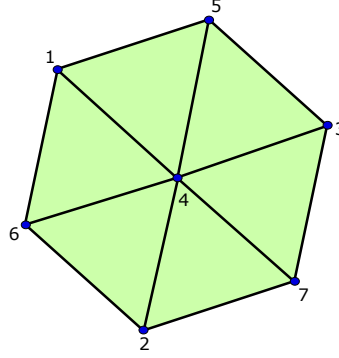


**Figura 3.6** – Recordemos que identificando los puntos “antípodas” en la frontera de este triángulo obtenemos al plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ . Los números en el 0-esqueleto de la triangulación definen una función-PL en  $\mathbb{RP}^2$  con mínimo en 0, máximo en 5 y punto silla 2.

### 3.4 Gráficas de Reeb en superficies trianguladas

El objetivo principal de esta sección es mostrar que si  $S$  es una superficie triangulada y  $f: |S| \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse lineal por pedazos, entonces la gráfica de Reeb  $R_f(S)$  tiene tantos lazos no triviales como el género de  $S$ . Para demostrar esto tendremos que probar algunos resultados previos y mencionar ciertas definiciones que utilizaremos en la demostración.

Cabe mencionar que aunque los resultados que probamos aquí son válidos sobre funciones-PL, la mayoría de éstos serán demostrados sólo para fun-



**Figura 3.7** – Función-PL en la estrella de un punto que no es una función de Morse-PL.

ciones de Morse-PL. Para una demostración en general se puede consultar [16].

**Lema 3.13.** *Si  $S$  es una superficie triangulada,  $f: |S| \rightarrow \mathbb{R}$  es función-PL,  $\Delta = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subset S$  es un 2-simplejo y  $t \in \mathbb{R}$ , entonces existen las siguientes tres posibilidades:*

1.  $f^{-1}(t) \cap \Delta = \emptyset$ .
2.  $f^{-1}(t) \cap \Delta = \{x_i\}$  para algún  $x_i \in \{x_1, x_2, x_3\}$ .
3.  $f^{-1}(t) \cap \Delta$  es un segmento.

*Demostración.* Por ser  $f$  inyectiva en  $S^{(0)}$ ,  $f$  restringida a  $\Delta$  alcanza su mínimo  $t_0$  y su máximo  $l_0$  en los vértices.

Si  $t \notin [t_0, l_0]$ , entonces  $f^{-1}(t) \cap \Delta = \emptyset$ . Si  $t = t_0$  o  $t = l_0$ , entonces  $f^{-1}(t) \cap \Delta = \{x_i\}$ .

Para realizar el caso  $t \in (t_0, l_0)$ , pensemos sin pérdida de generalidad que  $f(x_1) = t_0$  y  $f(x_2) = l_0$ . Por la definición de  $f$  y la continuidad, existen unos únicos  $P \in \langle x_1, x_2 \rangle$  y  $Q \in (\langle x_1, x_3 \rangle \cup \langle x_3, x_2 \rangle)$  (puede suceder que  $Q = x_3$ ) tales que  $f(P) = f(Q) = t$ . Por último, nótese que

$$f(sP + (1-s)Q) = sf(P) + (1-s)f(Q) = st + (1-s)t = t.$$

De manera que en este caso  $f^{-1}(t) \cap \Delta$  es el segmento comprendido por los puntos  $P$  y  $Q$ . □

**Teorema 3.14.** *Si  $S$  es una superficie triangulada y orientable,  $f: |S| \rightarrow \mathbb{R}$  es FM-PL y  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces existen las siguientes tres posibilidades:*

1.  $f^{-1}(t_0) = \emptyset$ .

2.  $f^{-1}(t_0) \subset |S|$  es conexo y es homeomorfo a un punto, a un círculo o a un 8.
3.  $f^{-1}(t_0) \subset |S|$  es unión disjunta de círculos tal vez con un punto o con un 8.

*Demostración.* Supongamos que  $f(|S|) = [l_0, l_1]$ . Es obvio que si  $t_0 \notin [l_0, l_1]$ , entonces  $f^{-1}(t_0) = \emptyset$ .

Si  $t_0 = l_0$  o  $t_0 = l_1$ , es decir, si  $t_0$  es el mínimo o el máximo de  $f$ , entonces por la inyectividad de  $f$  en  $S^{(0)}$ ,  $f^{-1}(l_0) = x_i$  y  $f^{-1}(l_1) = x_j$ .

Supongamos que  $t_0 \in (l_0, l_1)$  es un valor regular y que  $\Delta \subset |S|$  es un 2-simplejo. Por el Lema 3.13 existen los siguientes dos casos:

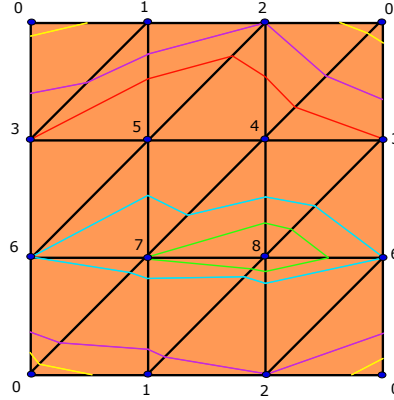
1.  $f^{-1}(t_0) \cap \Delta = \{x_i\}$  - Como  $x_i$  no es crítico, existen exactamente dos 2-simplejos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  que contienen a  $x_i$  y que  $f(x_i)$  no es máximo ni mínimo de  $f(\Delta_1)$  ni de  $f(\Delta_2)$  (ver Definición 3.10). Por el Lema 3.13,  $f^{-1}(t_0) \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2)$  son dos segmentos que se intersecan en  $x_i$ .
2.  $f^{-1}(t_0) \cap \Delta$  es el segmento entre los puntos  $P, Q$  - Si  $P$  y  $Q$  no son vértices de  $\Delta$ , entonces  $f^{-1}(t_0)$  interseca a los dos 2-simplejos adyacentes a  $\Delta$  en las aristas a las que pertenecen  $P$  y  $Q$  en dos segmentos disjuntos. Si  $P = \{x_i\}$ , entonces  $x_i$  no es crítico y por lo tanto existe un 2-simplejo  $\tilde{\Delta} \neq \Delta$  sobre el cual  $f(x_i)$  no es máximo ni mínimo. Por el Lema 3.13, concluimos que  $f^{-1}(t_0) \cap \tilde{\Delta}$  es un segmento comprendido entre  $x_i$  y un punto en su arista opuesta.

De esta manera concluimos que el conjunto  $f^{-1}(t_0) \cap \Delta$  siempre se extiende a segmentos comprendidos en 2-simplejos adyacentes a  $\Delta$ . Por la compacidad de  $|S|$ , esta extensión se continúa hasta regresar a  $\Delta$ . Esto demuestra que los contornos de  $f^{-1}(t_0)$  son círculos.

Si  $x_i \in S$  es máximo o mínimo (local), entonces el contorno de  $f^{-1}(t_0)$  que contiene a  $x_i$  es  $\{x_i\}$ . Luego, usando el caso en que  $t_0$  es valor regular y la inyectividad de  $f$  en  $S^{(0)}$ , concluimos que  $f^{-1}(t_0)$  es unión de círculos y un punto (por la conexidad de  $|S|$  no puede suceder que  $f^{-1}(t_0) = \{x_i\}$ ).

Por último, si  $t_0 \in \mathbb{R}$  es valor crítico y  $x_i \in S$  es vértice tal que  $f(x_i) = t_0$ , entonces existen exactamente cuatro 2-simplejos sobre los cuales  $f(x_i)$  no es mínimo ni máximo (ver Definición 3.10). Por el Lema 3.13,  $f^{-1}(t_0)$  interseca a estos 2-simplejos en segmentos, luego, usando el caso donde  $t_0$  es valor regular, concluimos que estos segmentos se pueden extender hasta que regresan a  $x_i$ . Por la tanto, el contorno de  $f^{-1}(t_0)$  es homeomorfo a un 8. Usando el caso en que  $t_0$  es regular en el resto de los contornos, concluimos que  $f^{-1}(t_0)$  es unión disjunta de círculos con un 8.  $\square$

**Ejemplo 3.15.** La Figura 3.8 muestra algunos subconjuntos de nivel de una función-PL en el toro  $\mathbb{T}^2$ .



**Figura 3.8** – Conjuntos de nivel de la función-PL que se muestra en toro  $\mathbb{T}^2$ , la figura muestra en amarillo  $f^{-1}(1/2)$ , en violeta  $f^{-1}(2)$ , en rojo  $f^{-1}(3)$ , en azul cielo  $f^{-1}(6)$  y en verde  $f^{-1}(7)$ . Notar que  $f^{-1}(2)$  y  $f^{-1}(6)$  son homeomorfos a un 8 ya que 2 y 6 son valores críticos.

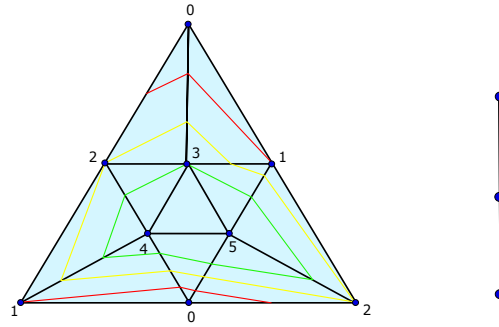
De manera que sobre superficies trianguladas orientables, los puntos críticos de una función-PL es donde cambia el número de contornos en los conjuntos de nivel. El Ejemplo 3.16 muestra que esto no sucede en el caso de superficies no orientables.

**Ejemplo 3.16.** Contornos de la función-PL en  $\mathbb{RP}^2$  y la Grafica de Reeb de la pareja  $(\mathbb{RP}^2, f)$ .

En lo que resta de esta sección,  $S$  será una superficie triangulada tal que  $|S|$  es orientable,  $f: |S| \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse lineal por pedazos y  $R_f(S)$  la gráfica de Reeb asociada a la pareja  $(S, f)$ .

A continuación mencionamos algunas propiedades sencillas de  $R_f(S)$ :

1.  $R_f(S)$  puede tener multiaristas. La Figura 3.4 muestra un ejemplo.
2. Los máximos y los mínimos de  $f$  corresponden a vértices de grado 1 en  $R_f(S)$  ya que en los mínimos inicia una familia de contornos y en los máximos finaliza una familia de contornos.
3. Los puntos silla de  $f$  corresponden a vértices de grado 3 en  $R_f(S)$ . La Figura 3.9 muestra que esto no es válido si  $S$  no es orientable, en ese caso el 0-simplejo etiquetado con el 2 es un punto silla y determina un vértice de grado 2 en  $R_f(\mathbb{RP}^2)$ .



**Figura 3.9** – A la izquierda vemos ciertos conjuntos de nivel de la función-PL en  $\mathbb{RP}^2$ , en rojo  $f^{-1}(1)$ , en amarillo  $f^{-1}(2)$  y en verde  $f^{-1}(3)$ . A la derecha vemos la gráfica de Reeb asociada, los vértices de abajo hacia arriba corresponden a  $\phi(f^{-1}(0))$ ,  $\phi(f^{-1}(2))$  y  $\phi(f^{-1(5)})$  respectivamente. Notar que aunque 2 es valor crítico y  $f^{-1}(2)$  es homeomorfo a un 8, el número de contornos en las preimágenes no cambia, esto ilustra que en superficies no orientables las cosas son distintas.

4. Concluimos que  $R_f(S)$  sólo tiene vértices de grado 1 y 3. En este sentido  $R_f(S)$  es una grafica sencilla.

Procedemos a dar unas definiciones que necesitaremos para la prueba del teorema principal de esta sección.

**Definición 3.17.** Si  $r \in \mathbb{R}$  y  $\sigma \in S$ , entonces decimos que  $\sigma$  es un **simplejo-cruzado a  $r$**  si satisface una de las siguientes condiciones:

1.  $\sigma$  es un vértice y  $f(\sigma) = r$ .
2. Existen vértices  $v_i, v_j < \sigma$ , tales que  $f(v_i) < r < f(v_j)$ .

De manera que un simplejo-cruzado para el valor  $r$ , es un simplejo tal que su interior intersecta a  $f^{-1}(r)$ . Nótese que sobre todo 2-simplejo  $\sigma \in S$ , existe un vértice  $v_i \in \sigma$  tal que  $\sigma$  es simplejo-cruzado del valor  $f(v_i)$  (recordemos que pedimos que  $f: S^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  sea inyectiva).

**Definición 3.18.** Si  $v \in S$  es un vértice tal que  $f(v) = c$ , entonces el **índice discreto de  $v$**  es el número

$$i(v) = 1 - \frac{t_c(v)}{2}$$

donde  $t_c(v)$  es el número de triángulos-cruzados a  $c$  en  $St(v)$ .

De la Definición 3.10 se sigue que los máximos y los mínimos de  $f$  tienen índice 1, los puntos regulares tienen índice 0 y los puntos silla tienen índice  $-1$ .

**Definición 3.19.** La *característica de Euler* de un complejo simplicial  $K$  de dimensión  $n$  es el número

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i,$$

donde  $k_i$  es el número de  $i$ -simplejos que tiene  $K$ .

Para una superficie triangulada  $S$  la característica de Euler se ve como

$$\chi(S) = V(S) - A(S) + T(S),$$

donde  $V(S)$  es el número de vértices en  $S$ ,  $A(S)$  es el número de aristas (1-simplejos) y  $T(S)$  es el número de triángulos (2-simplejos). Además, como toda arista de  $S$  pertenece a exactamente 2 triángulos y cada triángulo tiene 3 aristas, entonces se cumple

$$3 T(S) = 2 A(S), \quad \text{luego} \quad \chi(S) = V(S) - \frac{1}{2}T(S).$$

Es bien conocido que  $\chi(S)$  es un invariante topológico de  $|S|$  que sólo depende del género de  $|S|$  (informalmente, el género es el número de hoyos de  $|S|$ ) y no depende de la triangulación (estructura de complejo simplicial). Además, si  $S$  es una superficie triangulada tal que  $|S|$  es orientable y de género  $g$ , entonces se satisface la fórmula  $\chi(S) = 2 - 2g$  [17, Cap. 1].

**Lema 3.20.** Si  $m$  es el número de vértices en  $S$  que son máximos o mínimos de  $f$ , y  $s$  es el número de puntos silla de  $f$  en  $S$ , entonces se satisface

$$\chi(S) = \sum_{v \in S^{(0)}} i(v) = m - s.$$

*Demostración.* Si para todo  $v \in S^{(0)}$  hacemos  $c_v = f(v)$ , entonces

$$\sum_{v \in S^{(0)}} i(v) = \sum_{v \in S^{(0)}} \left(1 - \frac{t_{c_v}(v)}{2}\right) = V(S) - \sum_{v \in S^{(0)}} \frac{1}{2}t_{c_v}(v) = V(S) - \frac{1}{2}T(S)$$

donde la última igualdad se sigue de que todo triángulo de  $S$  es simplejo-cruzado de exactamente uno de sus vértices.  $\square$

Ahora estamos listos para la demostración del Teorema principal de esta sección.

**Teorema 3.21.** Supongamos que  $S$  es una superficie triangulada, orientable y de género  $g$ . Si  $f: |S| \rightarrow \mathbb{R}$  es una FM-PL, entonces  $R_f(S)$  tiene exactamente  $g$  lazos no triviales.

*Demostración.* Llamemos  $m$  al número de vértices de  $S$  que son máximos o mínimos de  $f$  y  $s$  al número de puntos silla de  $f$  en  $S$ .

Como  $R_f(S)$  es una gráfica (por lo tanto un complejo simplicial), entonces se satisface

$$\chi(R_f(S)) = V(R_f(S)) - A(R_f(S)) = \beta_0(R_f(S)) - \beta_1(R_f(S))$$

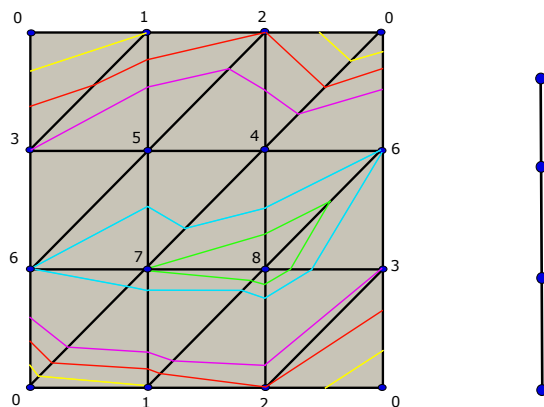
donde  $\beta_0(R_f(S))$  y  $\beta_1(R_f(S))$  son los dos primeros número de Betti de  $R_f(S)$  [8, Teorema 2.44]. Por la conexidad de  $S$ , podemos reescribir la igualdad como

$$V(R_f(S)) - A(R_f(S)) = 1 - \beta_1(R_f(S)).$$

Sabemos que  $V(R_f(S)) = m + s$ , además, de las Propiedades 2 y 3 mencionadas al principio de esta sección, se sigue que  $A(R_f(S)) = \frac{1}{2}(m + 3s)$  ya que al contar los grados de los vértices contamos cada arista dos veces. Sustituyendo estas igualdades y utilizando el Lema 3.20, tenemos que

$$\beta_1(R_f(S)) = 1 - \frac{m - s}{2} = 1 - \frac{1}{2}\chi(S) = g. \quad \square$$

Concluimos que si  $S$  es una superficie triangulada y orientable, entonces toda gráfica de Reeb (con cualquier función-PL) de  $S$  atrapa el género de  $|S|$ . La Figura 3.10 muestra una función-PL en la Botella de Klein  $\mathcal{B}$  tal que su gráfica de Reeb asociada no atrapa al género de  $\mathcal{B}$  que es 2.



**Figura 3.10** – Función de Morse-PL y conjuntos de nivel en la Botella de Klein  $\mathcal{B}$ , se muestran en amarillo  $f^{-1}(1)$ , en rojo  $f^{-1}(2)$ , en morado  $f^{-1}(3)$ , en azul cielo  $f^{-1}(6)$  y en verde  $f^{-1}(7)$ . Nótese que 2 y 6 son puntos silla y sus conjuntos de nivel son homeomorfos al 8. A la derecha vemos la grafica de Reeb asociada, dicha gráfica no tiene ningún lazo y por lo tanto no atrapa al género de  $\mathcal{B}$ .

### 3.5 Gráficas de Reeb y persistencia

En esta sección veremos que podemos usar Gráficas de Reeb para estudiar la homología a los niveles 0 y 1 de un complejo simplicial  $K$ . Aquí supondremos que  $f: K^{(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  es biyectiva y que  $\emptyset \neq K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = K$  es una filtración de  $K$ .

Extendiendo linealmente a  $f$  sobre cada  $K_j$  entre 1 y  $n$ , definimos una función-PL  $f_j: |K_j| \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotaremos con  $R_j$  a la gráfica de Reeb de la pareja  $(K_j, f_j)$  y con  $\phi_j: |K_j| \rightarrow R_j$  a la función de paso al conciente.

Es claro que si  $i_j: |K_j| \rightarrow |K_{j+1}|$  es la inclusión y  $p \in |K_j|$ , entonces  $f_j(p) = (f_{j+1} \circ i_j)(p)$ . De manera que  $i_j$  respeta la relación de equivalencia definida por  $f_j$  en  $|K_j|$ . Concluimos que existe  $\eta_j: R_j \rightarrow R_{j+1}$  que es continua y hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K_j & \xrightarrow{i_j} & K_{j+1} \\ \downarrow \phi_j & & \downarrow \phi_{j+1} \\ R_j & \xrightarrow{\eta_j} & R_{j+1} \end{array}$$

La sucesión de funciones continuas  $\{\eta_j\}$  induce una sucesión de homomorfismos en los primeros grupos de homología de las  $R_j$  de la siguiente manera:

$$H_1(R_1) \xrightarrow{\eta_{1*}} H_1(R_2) \xrightarrow{\eta_{2*}} \dots \xrightarrow{\eta_{(n-1)*}} H_1(R_f(K))$$

Ahora podemos estudiar los grupos de homología persistente como las imágenes de los homomorfismos  $\eta_*^{lj} = \eta_{j*} \circ \dots \circ \eta_{l*}: H_1(R_l) \rightarrow H_1(R_j)$ . Dichas imágenes corresponden a las clases de homología en  $H_1(R_l)$  que persisten hasta  $H_1(R_j)$ . El número de Betti persistente  $\beta^{lj}$ , se define como el rango del grupo de homología persistente  $Im(\eta_*^{lj})$ .

Tres observaciones que se siguen de las propiedades de las gráficas de Reeb son las siguientes:

1. La  $H_0$ -homología persistente de las gráficas de Reeb  $R_j$  es la misma que la  $H_0$ -homología persistente de los complejos simpliciales  $K_j$ .
2. La  $H_1$ -homología persistente de las  $R_j$  es distinta de la  $H_1$ -homología persistente de los  $K_j$ , además, dicha homología sólo depende de los subsimplejos  $K_j^{(2)}$ .
3. Para toda  $m > 2$ , la  $H_m$ -homología persistente de las  $R_j$  es trivial.

En el artículo [18] los autores proveen un algoritmo para calcular la  $H_1$ -homología persistente de las  $R_j$ , dicho algoritmo corre en tiempo  $O(nn_e^3)$  donde  $n$  es el tamaño del 2-esqueleto de  $K$  y  $n_e$  es el número de vértices y aristas de  $K$ .



## 3.6 Aplicaciones de las Gráficas de Reeb

Como se mostró en las secciones anteriores, las gráficas de Reeb son muy útiles para el estudio de la forma de objetos bidimensionales, ya que éstas determinan por completo la forma del objeto. Algunas referencias en las que se utilizan las Gráficas de Reeb para este tipo de problemas se mencionan a continuación:

- **Análisis de Superficies.**

1. Y. SHINAGAWA, T.L. KUNII AND Y.L. KERGOSIEN, Surface coding based on Morse theory. *Computer Graphics and Applications IEEE*, 11(5), 1991.
2. M. ATTENE, S. BIASOTTI AND M. SPAGNUOLO, Shape understanding by contour-driven retiling. *The Visual Computer*, 19(2), 127-138, 2003.
3. S. BIASOTTI, M. MORTARA AND M. SPAGNUOLO, Surface compression and reconstruction using Reeb graphs and shape analysis. *Proceedings of the 16th Spring Conference on Computer Graphics*, 2000.

- **Animación.**

1. P. KANONGCHAIYOS AND Y. SHINAGAWA, Articulated Reeb graphs for interactive skeleton animation. In *Multimedia Modeling: Modeling Multimedia Information and System*. World Scientific, Singapore, 451-467, 2000.
2. P. KANONCHAYOS, T. NISHITA, Y. SHINAGAWA AND T. L. KUNII, Topological Morphing Using Reeb Graphs. *International Conference on Cyberworlds-CW*, 465-471, 2002.

- **Segmentación de imágenes del cuerpo humano**

1. N. WERGHI, Y. XIAO AND J.P. SIEBERT, A functional-based segmentation of human body scans in arbitrary postures. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics*, 36, 2006.

- **Análisis de datos**

1. X. GE, I. SAFA, M. BELKIN AND Y. WANG, Data Skeletonization via Reeb Graphs. *Advances in Neural Information Processing Systems*, (NIPS 2011).

2. W. HARVEY, Y. WANG, AND R. WENGER, A randomized  $O(m \log m)$  time algorithm for computing Reeb graphs of arbitrary simplicial complexes. Proceedings of the twenty-sixth annual symposium on Computational Geometry, 267-276, 2010.
  3. K. DEY AND Y. WANG, Reeb graphs: approximation and persistence. Discrete & Computational Geometry, 49(1), 46-73, 2013.
  4. S. BIASOTTI, B. FALCIDIENO AND M. SPAGNUOLO, Extended Reeb Graphs for surface understanding and description, Discrete Geometry for Computer Imagery, Vol.1953, 185-197, 2001.
- **Repaso histórico sobre Gráficas de Reeb**
1. S. BIASOTTI, D. GIORGI, M. SPAGNUOLO AND B. FALCIDIENO Reeb graphs for shape analysis and applications. Theoretical Computer Science, 392, 5-22, 2008.

# Bibliografía

- [1] H. EDELSBRUNNER AND J. HARER, Computational Topology, An Introduction. American Mathematical Society, 2010.
- [2] AFRA ZOMORODIAN, Topological data analysis. Advances in applied and computational topology, 1–39, Proc. Sympos. Appl. Math., 70, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [3] V. DE SILVA AND R. GHRIST, Coverage in sensor networks via persistent homology. Alg. and Geom. Topology No.7,(2007), 339-358.
- [4] A. LUNDELL AND S. WEINGRAM, The Topology of CW Complexes. Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
- [5] J. MILNOR, Morse Theory. “Annals of Mathematics Study”, Vol. 51, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1962.
- [6] ROBIN FORMAN, Morse theory for cell complexes, Adv. Math. 134 (1998), No. 1, 90-145.
- [7] KAROL BORSUK, On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes. Fundamenta Mathematicae, 35 (1948), 217–234.
- [8] ALLEN HATCHER, Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [9] GEORGE REEB, Sur les points singuliers d une forme de Pfaff complètement integrable ou d une fonction numerique. In Comptes rendus de l’Academie des Sciences 222, pages 847-849, 1946.
- [10] MALORS ESPINOSA, Notas de Homología Persistente, <http://atd.cimat.mx/>, CIMAT, (2015).
- [11] LAURA BRANDOLINI, A Discrete Approach to Reeb Graph Computation and Surface Mesh Segmentation: Theory and Algorithm. Tesis

de doctoral, Department of Industrial and Information Engineering, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA, 2011.

- [12] K. MISCHAIKOW AND V. NANDA, Morse Theory for Filtrations and Efficient Computation of Persistent Homology. *Discrete Computational Geometry* (2013) 50. 330-353.
- [13] H. KING, K. KNUDSON AND M. NEŽA, Birth and Death in Discrete Morse Theory. *arXiv:0808.0051v3*, 2015.
- [14] G. JERŠEA AND M. NEŽA, Ascending and descending regions of a discrete Morse function. *Computational Geometry*, Vol. 42. (2009) 639-651.
- [15] V. ROBINS, P. WOOD AND A. SHEPPARD, Theory and algorithms for constructing discrete Morse complexes from grayscale digital images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(8):1646–1658, 2011.
- [16] K. COLE McLAUGHLIN, H. EDELSBRUNNER, J. HARER, V. NATARAJAN AND V. PASCUCCI, Loops in Reeb graphs of 2-manifolds. In *Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry*, (2003) 344-350, New York, USA.
- [17] W. S. MASSEY, *Algebraic Topology: An Introduction*. Graduate Text in Mathematics, Springer. 1977.
- [18] T. K. DEY AND Y. WANG, Reeb Graphs: Approximation and Persistence. *Discrete Computational Geometry* (2013) 49:46-73.