Verano de Investigación Científica de la Academia Mexicana de Ciencias (AMC)

Haces fibrados para espacios cerradura

Shaira Rocío Hernández Flores

Investigador asesor:
Dr. Antonio Rieser

17 de agosto de 2018

Índice

1. Espacios cerradura

En esta sección introduciremos la noción de *operador cerradura* y *espacio cerradura*. Veremos algunos resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de las siguientes secciones las cuáles son el objetivo principal de este trabajo.

1.1. Definición de espacios cerradura

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Un operador cerradura de Čech es un mapa

$$c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

que satisface

1. $c(\emptyset) = \emptyset$
2. $A \subset c(A)$
3. $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$

Un par (X, c) es llamado *espacio cerradura* y para un conjunto $A \subset X$ decimos que $c(A)$ es la cerradura de A. Si $A = \{x\}$ escribiremos $c(\{x\})$ como $c(x)$. Dados dos operadores de Čech c_1 y c_2 sobre el mismo espacio X, decimos que c_1 es más fino que c_2 (y c_2 más grueso que c_1) si y sólo si para cada $A \subset X$, $c_1(A) \subset c_2(A)$.

Observación. La definición anterior nos dice que el operador cerradura es monótono, es decir, si $A \subset B$ entonces $c(A) \subset c(B)$. Esto pues

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow A \cup B = B \\ &\Rightarrow c(B) = c(A) \cup c(B) \\ &\Rightarrow c(A) \subset c(B) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y definimos $c(x) = \{(x-1) \bmod 4,\ x, (x+1) \bmod 4$ $\}$. Entonces si

$$c(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \bigcup_{n \in A} c(n) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

(X, c) es un espacio cerradura.

Ejemplo 1.2. Sea $X = \mathbb{N}$ y definimos $c(n) = \{n, n+1\}$. Para $A \subset \mathbb{N}$ definimos

$$c(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \bigcup_{n \in A} c(n) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Entonces c es un operador cerradura para $\mathbb{N}$.

Ejemplo 1.3. Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$ y sea

$$\begin{aligned} c(0) &= \{0, 1\} \\ c(1) &= \{0, 1\} \\ c(2) &= \{1, 2\} \\ c(3) &= \{2, 3\} \end{aligned}$$

Para $A \subset X$ definimos

$$c(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \bigcup_{n \in A} c(n) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Luego c es un operador cerradura para X.

Ejemplo 1.4. Sea X un espacio topológico, entonces X es un espacio cerradura con el operador definido por $c(A) = \overline{A}$.

1.2. Vecindades

Definición 1.2. Sea (X, c) un espacio cerradura. Decimos que $A \subset X$ es cerrado si $c(X - A) = X - A$ y que A es abierto si $X - A$ es cerrado.

Las nociones de conjuntos abiertos y cerrados existen en los espacios cerradura, sin embargo no tomarán el papel principal en el estudio de las funciones continuas entre estos espacios contrario a lo que sucede con los espacios topológicos.

Definición 1.3. Sea (X, c) un espacio cerradura. Decimos que $U \subset X$ es una vecindad de $A \subset X$ si $A \subset X - c(X - U)$. Un sistema de vecindades de un conjunto A es una colección de vecindades de A.

Observación. De la definición anterior podemos observar que un conjunto A es abierto si y sólo si es es una vecindad de cada uno de sus puntos.

Lema 1.1. *Sea (X, c) un espacio cerradura y $x \in X$. Si U, V son vecindades de x entonces $U \cap V$ es una vecindad de x.*

Demostración. Por ser U, V vecindades de x se tiene que

$$x \in X - c(X - U) \quad \text{y} \quad x \in X - c(X - V).$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} &x \in (X - c(X - U)) \cap (X - c(X - V)) \\ &x \in X \cap [c(X - U) \cup c(X - V)]^c \\ &x \in X \cap [c(X - U \cup X - V)]^c \\ &x \in X \cap [c(X - U \cap V)]^c \\ &x \in X - c(X - U \cap V). \end{aligned}$$

Entonces por definición $U \cap V$ es una vecindad de x.

■

Definición 1.4. Sea (X, c) un espacio cerradura. El operador interior asociado int_c es una función $int_c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que

$$int_c(U) = X - c(X - U)$$

El conjunto $\mathrm{int}_c(U)$ es llamado *interior de U* en (X, c) o el *c-interior de* U.

Observación. Con la definición anterior vemos que si $x \in \mathrm{int}_c(U)$ entonces U es una vecindad de x.

1.3. Subespacios

Definición 1.5. Sea (X, c) un espacio cerradura. Definimos el operador cerradura c_A en el subespacio $A \subset X$ por $c_A(B) = A \cap c(B)$ donde $B \subset A \subset X$.

A continuación veremos un resultado que será de gran importancia en el desarrollo de la teoría de haces fibrados para estos espacios cerradura.

Proposición 1.1. *Sea $(B, c_B) \subset (X, c_X)$ un subespacio cerradura. Sea $x \in B$ y V una vecindad de $x \in B$. Entonces existe U vecindad de $x \in X$ tal que $V = U \cap B$.*

Demostración. Probaremos que para cada $S \subset B$ se tiene que

$$int_B(S) = B \cap \mathrm{int}_X(S \cup (X - B)).$$

Por defimción tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{int}_X(S \cup (X - B)) &= X - c_X[X - (S \cup (X - B))] \\ &= X - c_X[(X - S) \cap B] \\ &= X - c_X(B - S)\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}B \cap \mathrm{int}_X(S \cup (X - B)) &= B \cap [X - c_X(B - S)] \\ &= B - c_X(B - S) \cap B \\ &= \mathrm{int}_B(S)\end{aligned}$$

Ahora, para V vecindad de $x \in B$ tomemos $U = V \cup (X - B)$. Notemos que

$$\begin{aligned}x \in \mathrm{int}_B(V) &= B \cap \mathrm{int}_X(V \cup (B - S)) \\ &= B \cap \mathrm{int}_X(U)\end{aligned}$$

Así, $x \in B \cap \mathrm{int}_X(U)$ y en consecuencia U es una vecindad de $x \in X$. Claramente se tiene que $V = U \cap B$ y con esto se obtiene el resultado.

■

En espacios topológicos tenemos un resultado similar: Si B es un subespacio de un espacio topológico X y V es abierto en B entonces existe un abierto U en X tal que $V = U \cap B$. Sin embargo, este resultado no es cierto en espacios cerradura. Para ver esto tomemos (X, c_X) como en el ejemplo 3. Verificando cada uno de los subconjuntos de X tenemos que sus únicos conjuntos abiertos son $\{2, 3\}$ y $\{3\}$.Tomemos $B = \{0, 2, 3\}$ y sea $A = \{2, 3\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}c_B(A) &= c_X(A) \cap B \\ &= \{1, 2, 3\} \cap B \\ &= \{2, 3\} \\ &= A,\end{aligned}$$

entonces A es cerrado en B y en consecuencia $\{0\}$ es abierto en B. Por otro lado

$$\begin{aligned}B \cap \{2, 3\} &\neq \{0\} \\ B \cap \{3\} &\neq \{0\}.\end{aligned}$$

Con esto tenemos que si $(B, c_B) \subset (X, c_X)$ es un subespacio y S es un abierto de (B, c_B), no necesariamente existe un abierto T en (X, c_X) tal que $S = T \cap B$.

1.4. Funciones continuas y homeomorfismos.

En esta sección definiremos el concepto de función continua entre espacios topológicos y veremos algunas propiedades útiles que éstas cumplen.

Definición 1.6. Sean (X, c_X) y (Y, c_Y) dos espacios cerradura. Decimos que un mapa $f : X \to Y$ es continuo en x si dado $U \subset X$,

$$x \in c_X(U) \Rightarrow f(x) \in c_Y(f(U)).$$

Si f es continua en todo punto decimos que f es continua. Equivalentemente f es continua si para todo $U \subset X$ se tiene que $f(c_X(U)) \subset c_Y(f(U))$.

Con esta definición podemos observar que si f es una función entre espacios topológios entonces es una función continua entre los espacios cerradura con los operadores cerradura inducidos por la topología del espacio.
Las siguientes proposiciones nos dicen que al igual que en espacios topológicos, la restricción de una función continua y la composición de funciones continuas es una función continua.

Proposición 1.2. *Sea $h : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$ una función continua entre dos espacios cerradura y sea $A \subset X$. Entonces la restricción de h a A es una función continua. Además, $f : (X, c_X) \to (f(X), c_{f(X)})$ también es continua.*

Demostración. Sea $U \subset A$ entonces por ser h continua y c_X monótono se tiene que

$$h\big|_A(c_A(U)) = h\big|_A(c_X(U) \cap A) \subset h(c_X(U)) \subset c_Y(h(U)) = c_Y(h\big|_A(U))$$

Para probar la última afirmación notemos que por ser f continua se tiene que

$$f(c_X(U)) \subset c_Y(f(U)).$$

Luego, es claro que

$$f(c_X(U)) \subset c_Y(f(U)) \cap f(X) = c_{f(X)}(f(U)).$$

Por lo tanto $f : (X, c_X) \to (f(X), c_{f(X)})$ es continua. ■

Proposición 1.3. *Sean $f : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$ y $g : (Y, c_Y) \to (Z, c_Z)$ dos funciones continuas. Entonces $gf : (X, c_X) \to (Z, c_Z)$ es continua.*

Demostración. Sea $U \subset X$ tenemos que

$$\begin{aligned} gf(c_X(U)) &= g(f(c_X(U))) \\ &\subset g(c_Y(f(U))) \quad \text{Pues } f \text{ es continua,} \\ &\subset c_Z(g(f(U)) \quad \text{Pues } g \text{ es continua.} \end{aligned}$$

Por lo tanto gf es continua.

■

A continuación probaremos un teorema que caracteriza las funciones continuas por medio de vecindades.

Teorema 1.1. *Sea $f : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$, f es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y V vecindad de $f(x)$ entonces $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x. Equivalentemente, para cada V vecindad de $f(x)$ existe U vecindad de x tal que $f(U) \subset V$.*

Demostración. Sean $x \in X$. de $f(x)$. Supongamos que f es una función continua y sea V una vecindad de $f(x)$. Si $U = f^{-1}(V)$ no es una vecindad de x se tiene que $x \in c_X(X-U)$ y de la continuidad de f se sigue que

$$f(x) \in f(c_X(X-U)) \subset c_Y(f(X-U)) \subset c_Y(Y-V).$$

Entonces $f(x) \notin Y - c_Y(Y-V)$, lo cual contradice que V sea una vecindad de $f(x)$. En consecuencia $U = f^{-1}(V)$ es una vecindad de x.

De forma inversa, sean $U' \subset X$ y $x \in c_X(U')$. Si $f(x) \notin c_Y(f(U'))$ entones $V' = Y - f(U')$ es una vecindaad de $f(x)$ pues

$$f(x) \in Y - c_Y(f(U')) = Y - c_Y(Y-(Y-f(U')) = Y - c_Y(Y-V).$$

Por hipótesis tenemos que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x. Dado que $f^{-1}(V') \cap U' = \emptyset$ tenemos que $x \notin U'$ implica $x \notin c_X(U')$, lo cual es una contradicción. Así, $f(x) \in c_Y(f(U))$ y por ser x arbitrario tenemos que $f(c_X(U)) \subset c_Y(f(U'))$. Por lo tanto f es continua.

■

Definición 1.7. Decimos que una colección $\{X_a\}_{a\in A}$ de subconjuntos de (X, c_X) es una cubierta de X si $\bigcup_{a\in A} X_a = X$. Una cubierta interior de un espacio (X, c_X) es una colección $\{X_a\}_{a\in A}$ tal que $\{\mathrm{int}_X(X_a)\}_{a\in A}$ es una cubierta de X.

Teorema 1.2. *Sea $\{X_a\}_{a\in A}$ una cubierta interior de un espacio (P, c_P) y $f : (P, c_P) \to (Q, c_Q)$ una función tal que $f\big|X_a$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Sean $x \in P$, U una vecindad de $f(x)$ y $a \in A$ tal que $x \in \mathrm{int}X_a$. Como $f\big|X_a$ es continua existe una vecindad V de x en X_a tal que

$$f\big|X_a(V) \subset U.$$

Entonces $f(V) \subset U$. Para probar que f es continua basta ver que V es una vecindad de x en P.
Por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} &x \in P - c_P(P - X_a) \\ &x \in X_a - c_a(X_a - V) = X_a - c_P(X_a - V) \cap X_a \end{aligned}$$

y queremos probar que $x \in P - c_P(P-V)$. Supongamos que $x \in c_P(P-V)$. Notemos que $P - V = (P - X_a) \cup (X_a - V)$, entonces

$$x \in c_P(P-V) = c_P(P-X_a) \cup c_P(X_a - V).$$

Por hipotésis $x \notin c_P(P-X_a)$ y $x \notin c_P(P-X_a) \cap X_a$, lo cual contradice que $x \in c_P(P-V)$. Así, $x \in P - c_P(P-V)$ y en consecuencia V es una vecindad de x en P. Por lo tanto f es una función continua.

■

Corolario 1.2.1. *Sea $f : (P, c_P) \to (Q, c_Q)$ una función. Si para cada $x \in P$ existe una vecindad U de x tal que $f\big|U$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $x \in P$ y U_x una vecindad de x tal que $f\big|U_x$ es continua. Notemos que $\{U_x\}_{x\in P}$ es una cubierta interior de P. Entonces se sigue del teorema anterior que f es continua.

■

Definiremos ahora qué es un homeomorfismo entre espacios cerradura y daremos una caracterización para estas de funciones.

Definición 1.8. Un homeomorfismo entre dos espacios cerradura es una función biyectiva f tal que f y f^{-1} son continuas.

Proposición 1.4. *Sea $f : (P, c_P) \to (Q, c_Q)$ una función biyectiva entre dos espacios cerradura. Si f es un homeomorfismo entonces*

1. *Para cada $x \in P$, V es una vecindad de x si y sólo si $f(V)$ es una vecindad de $f(x)$.*

Si (1) *se satisface entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $x \in P$ y $V \subset P$, y sea g la inversa de f.

Supongamos que V es una vecindad de $x \in P$. Por ser f biyectiva se tiene que $(g)^{-1}(V) = f(V)$. Dado que g es continua y V vecindad de $x \in P$ se sigue del teorema 1.1 que $f(V)$ es una vecindad de $f(x)$.
Ahora, si $f(V)$ es una vecindad de $f(x)$ se tiene que $V = f^{-1}(f(V))$ es una vecindad de $x \in P$ pues f es una función biyectiva y continua. Así, si f es un homeomorfismo se satisface (1).

Supongamos ahora que (1) se satisface para una función biyectiva. Sea V una vecindad de $f(x)$, tenemos que $V = f(f^{-1}(V))$. Entonces por (1) se tiene que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x y por el teorema 1.1 f es continua. Por otro lado, sea U una vecindad de $x \in P$. Notemos que $g^{-1}(U) = f(U)$ es una vecindad de $f(x)$ por (1) y en consecuencia g es continua. Por lo tanto f es un homeomorfismo.

■

1.5. Estructura cerradura producto y cociente

Dado un espacio cerradura o una colección de ellos, nos interesa estudiar estructuras cerradura en nuevos espacios obtenidos a partir de los dados. Este es el caso del producto cartesiano de los espacios subyacentes o el espacio cociente obtenido a partir de una relación de equivalencia en el espacio. Para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 1.9. Sea $\{(X_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios cerradura.

1. Sea $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ el producto cartesiano de $\{X_\alpha\}$. Para cada $\beta \in I$ sea $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ el mapa proyección. Definimos el operador cerradura c_Π en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ como el operador cerradura más grueso que hace cada π_α continua. En algunas ocasiones escribiremos $\prod\{c_\alpha\}$ en lugar de c_Π y $\prod\{(X_\alpha, c_\alpha)\} = (\prod X_\alpha, \prod\{c_\alpha\})$.

2. Sea $p : (X, c_X) \to Y$ un mapa sobreyectivo. Entonces la estructura cerradura cociente c_p en Y inducida por p es la estructura cerradura más fina que hace que p sea continua.

Por el teorema 17 C.6 de [1] tenemos que c_Π existe. En la siguiente proposición resumimos algunos resultados importantes

Proposición 1.5. 1. *Para el espacio cerradura $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \prod c_\alpha)$ se tiene que los conjuntos de la forma $\prod V_\alpha$ forman un sistema de vecindades para el punto (x_α) donde cada V_α es una vecindad de x_α.*

2. *Una función f de un espacio cerradura en el producto $\prod\{(X_\alpha, c_\alpha)\}$ de una familia $\{(X_\alpha, c_\alpha)\}$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha f$ es continua para cada α.*

3. *Si X es el producto de una familia de espacios cerradura $\{(X_\alpha, c_\alpha)\}$ y V es una vecindad de $x \in X$, entonces $\pi_\alpha(V)$ es una vecindad de $\pi_\alpha(x)$ en X_α. En partícular, si P es abierto entonces $\pi_\alpha(P)$ es abierto.*

Demostración.
1. Teorema 17.C.6 de [1]
2. Proposición 17.C.10 de [1]
3. Proposición 17.C.7 de [1]

■

2. Generalidades en haces

En esta sección con la definición de haz para espacios cerradura así como de morfismos entre ellos. Además veremos algunos resultados generales que cumplen dichos haces.

2.1. Haces y morfismos de haces

Definición 2.1. Un **haz** es una tripleta $((E, c_E), p, (B, c_B))$ donde

$$p : (E, c_E) \to (B, c_B)$$

es una función continua. El espacio (E, c_E) es llamado espacio total, (B, c_B) es llamado espacio base y p es llamado el mapa proyección del haz.

En lo sucesivo usaremos letras griegas ($\xi, \eta, \varsigma, \lambda$, etc.) para denotar un haz, así como $E(\xi)$ y $B(\xi)$ para denotar al espacio total y espacio base de ξ, respectivamente.

Definición 2.2. Sean $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ y $\xi' = ((E', c_{E'}), p', (B', c_{B'}))$ dos haces. Un morfismo de haces $(u, f) : \xi \to \xi'$ es un par de funciones continuas $u : (E, c_E) \to (E', c_{E'})$ y $f : (B, c_B) \to (B', c_{B'})$ tales que $p'u = fp$. Es decir, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

Definición 2.3. Sean $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ y $\xi' = ((E', c_{E'}), p', (B, c_B)$ dos haces sobre B. Un B-morfismo de haces $u : \xi \to \xi'$ es una función continua $u : (E, c_E) \to (E', c_{E'})$ tal que $p'u = p$. Es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Definición 2.4. Sea $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ un haz. Una sección transversal para ξ es una función continua $s : (B, c_B) \to (E, c_E)$ tal que $ps = Id_B$.

Definición 2.5. Sean $\xi_1 = ((E_1, c_{E_1}), p_1, (B, c_B)), \xi_2 = ((E_2, c_{E_2}), p_2, (B, c_B))$ dos haces sobre B. Definimos la suma Whitney de ξ_1 y ξ_2 como el haz $((E_1 \oplus E_2, c), q, (B, c_B))$ donde

$$E_1 \oplus E_2 = \{(x, x') \in E_1 \times E_2 \mid p_1(x) = p_2(x)\}$$

y c es el operador cerradura de subespacio inducido por c_Π, el más grueso que hace que cada proyección de $E_1 \times E_2$ sea continua. Definimos $q(x, x') = p_1(x) = p_2(x')$.

2.2. Restricción de haces y haces inducidos.

Definición 2.6. Sea $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ un haz y sea $A \subset B$. La restricción de ξ a A, denotada por $\xi \mid A$, es el haz $((E', c_{E'}), p', (A, c_A))$ donde $E' = p^{-1}(A)$ y $p' = p \mid E'$.

Definición 2.7. Sea $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ un haz y sea

$$f : (B_1, c_{B_1}) \to (B, c_B)$$

una función continua. El haz inducido de ξ bajo f, denotado por $f^*(\xi)$, tiene como espacio base (B_1, c_{B_1}), como espacio total (E_1, c_{E_1}) el subespacio de todas las parejas $(b_1, x) \in B_1 \times E$ con $f(b_1) = p(x)$, y como proyección el mapa $(b_1, x) \mapsto b_1$.

Si $f^*(\xi)$ es el haz inducido de ξ bajo f entonces $f_\xi : E(f^*(\xi)) \to E(\xi)$, definido por $f_\xi(b_1, x) = x$, junto con f definen un morfismo $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$. Esto pues

$$p f_\xi(b_1, x) = p(x) = f(b_1) = f p_1(b_1, x),$$

y así el diagrama

$$\begin{tikzcd} E(f^*(\xi)) \arrow[r, "f_\xi"] \arrow[d, "p_1"'] & E(\xi) \arrow[d, "p"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 2.1. *Sea $(u, v) : \eta \to \xi$ un morfismo de haces y*

$$f : (B(\eta), c_{B(\eta)}) \to (B(\xi), c_{B(\xi)})$$

una función continua. Entonces existe $B(\eta)$-morfismo $w : \eta \to f^*(\xi)$ tal que $f_\xi w = v$. El morfismo w es único respecto a esta propiedad.

Demostración. Tenemos que $E(f^*(\xi)) = \{(b, x) \in B(\eta) \times E(\xi) \mid f(b) = p_\xi(x)\}$. Definimos $w : \eta \to f^*(\xi)$ por $w(y) = (p_\eta(y), v(y))$. Por ser (v, f) un morfismo se tiene que $f p_\eta(y) = p_\xi v(y)$. Entonces w está bien definida. Por otro lado, $\pi_1 w(y) = p_\eta(y)$ y entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} E(\eta) \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "p_\eta"'] & & E(f^*(\xi)) \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & B(\eta) & \end{tikzcd}$$

conmuta. Como p_η y v son continuas tenemos que w es continua y así w es un $B(\eta)$-morfismo.
Tenemos además que $f_\xi w(y) = f_\xi(p_\eta(y), v(y)) = v(y)$. En consecuencia $f_\xi w = v$. Supongamos ahora que $w'(y) = (h(y), g(y))$ es un $B(\eta)$-morfismo tal que $f_\xi w' = v$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} v(y) &= f_\xi w'(y) \\ &= f_\xi(h(y), g(y)) \\ &= g(y). \end{aligned}$$

Además por ser w' un $B(\eta)-$morfismo se tiene que $\pi_1 w'(y) = p_\eta(y)$, es decir, $h(y) = p_\eta(y)$ y por consiguiente $w = w'$. Por lo tanto w es único respecto a esta propiedad.

■

3. Haces vectoriales

Para esta sección $(\mathbb{F}, c_\tau)$ denotará un espacio cerradura donde $\mathbb{F}$ el campo de los números reales $\mathbb{R}$, números complejos $\mathbb{C}$ o los cuaterniones $\mathbb{H}$, y c_τ es el operador cerradura inducido por la topología estándar de cada uno de estos campos.

Definición 3.1. Un haz vectorial de dimensión k sobre el campo $(\mathbb{F}, c_\tau)$ es un haz $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ tal que para cada $b \in B$

1. $p^{-1}(b)$ tiene estructura de $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión k
2. Existe una vecindad U de b y un U-isomorfismo
$$h : (U \times \mathbb{F}^k, c_U \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p^{-1}(U), c_{p^{-1}(U)})$$
tal que la restricción $(a \times \mathbb{F}^k, c_a \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p^{-1}(a), c_{p^{-1}(a)})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $a \in U$.

Proposición 3.1. *Sean s, s' dos secciones transversales de un haz vectorial $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ y sea $\phi : (B, c_B) \to (\mathbb{F}, c_\tau)$ una función continua. Entonces las funciones definidas por*

$$\begin{aligned} s + s'(b) &:= s(b) + s'(b) \\ (\phi s)(b) &:= \phi(b)s(b) \\ 0(b) &:= 0 \end{aligned}$$

son secciones transversales de ξ.

Demostración. Sea $b \in B$. Observemos que $s(b), s'(b) \in p^{-1}(b)$ y por ser $p^{-1}(b)$ un espacio vectorial se tiene que $s(b) + s'(b), \phi(b)s(b), 0 \in p^{-1}(b)$.
Así,

$$\begin{aligned} p(s + s')(b) &= p(s(b) + s(b')) = b \\ p(\phi s)(b) &= p(\phi(b)s(b)) = b \\ p(0)(b) &= b. \end{aligned}$$

Sean U una vecindad de b y $h : (U \times \mathbb{F}^k, c_U \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p^{-1}(U), c_{p^{-1}(U)})$ un U-isomorfismo. Tenemos que

$$h^{-1}s(a) = (g(a), f(a))$$

donde $g : (U, c_U) \to (U, c_U)$ y $f : (U, c_U) \to (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k})$ son continuas. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "Id_U"'] & p^{-1}(U) \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "p"] & U \times \mathbb{F}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd} .$$

Entonces $g(a) = a$ y en consecuencia $h^{-1}s$ es de la forma $h^{-1}s(a) = (a, f(a))$. Análogamente $h^{-1}s'$ es de la forma $h^{-1}s'(a) = (a, f'(a))$ con $f' : (U, c_U) \to (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k})$ continua. Por otro lado tenemos que las funciones

$$\begin{aligned} + : (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k}) \times (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k}) &\to (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k}) \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : (\mathbb{F}, c_{\mathbb{F}^k}) \times (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k}) &\to (\mathbb{F}^k, c_{\mathbb{F}^k}) \\ (t, y) &\mapsto t \cdot x \end{aligned}$$

son continuas en el sentido topológico, entonces son continuas como espacios cerradura.

Las funciones $f \times f'$ y $\phi \times f$ son continuas por la proposición 1.5(b) y en consecuencia $f + f'$ y ϕf son continuas pues son composiciones de funciones continuas.
Notemos ahora que

$$\begin{aligned} h^{-1}(s+s)'(a) &= h^{-1}(s(a)+s'(a)) \\ &= (a, f(a)) + (a, f'(a)) \\ &= (a, f'(a) + f(a)), \\ h^{-1}(\phi s)(a) &= h^{-1}(\phi(a)s(a)) \\ &= \phi(a)h^{-1}s(a) \\ &= \phi(a)(a, f(a)) \\ &= (a, \phi(a)f(a)), \\ h^{-1}(0)(a) &= (a, 0). \end{aligned}$$

Por la proposición 1.5 (b), $h^{-1}(s+s'), h^{-1}(\phi s), h^{-1}(0)$ son continuas en (U, c_U). Así, $s + s', \phi s, 0$ son continuas en (U, c_U). Del corolario 1.2.1 se sigue que $s+s', \phi s, 0$ son continuas en (B, c_B) y por lo tanto secciones transversales de $(B,_B)$.

■

La proposición anterior nos dice que el conjunto de secciones transversales de un haz vectorial ξ forman un módulo sobre el anillo de funciones continuas $\mathbb{F}$-valuadas en $B(\xi)$.

3.1. Morfismos de haces vectoriales

Sea $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ un haz, a partir de ahora escribiremos E_b para denotar a $p^{-1}(b) \subset E$.

Definición 3.2. Sean ξ y ξ' dos haces vectoriales. Un morfismo entre haces vectoriales $(u, f) : \xi \to \xi$' es un par de funciones continuas

$$\begin{aligned} u &: (E(\xi), c_{E(\xi)}) \to (E(\xi'), c_{E(\xi')}) \\ f &: (B(\xi), c_{B(\xi)}) \to (B(\xi'), c_{B(\xi')}) \end{aligned}$$

tales que $p'u = fp$ y la restricción $u : (E_b, c_{E_b}) \to (E'_{f(b)}, c_{E'_{f(b)}})$ es lineal para cada $b \in B(\xi)$.

Definición 3.3. Sean ξ y ξ' dos haces vectoriales con el mismo espacio base $B(\xi)$. Un $B(\xi)$-morfismo entre haces vectoriales $u : \xi \to \xi'$ es definido por un morfismo de la forma $(u, Id_{B(\xi)})$

Ejemplo 3.1. Consideremos los haces

$$\begin{aligned} \xi &= ((B \times \mathbb{F}^k, c_B \times c_{\mathbb{F}^k}), p, (B, c_B)) \\ \eta &= ((B \times \mathbb{F}^m, c_B \times c_{\mathbb{F}^m}), p, (B, c_B)), \end{aligned}$$

donde p es la proyección en la primer coordenada. Sea $u : \xi \to \eta$ un B-morfismo de haces vectoriales, entonces $u : (B \times \mathbb{F}^k, c_B \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (B \times \mathbb{F}^m, c_B \times c_{\mathbb{F}^m})$ es una función continua tal que $pu = p$.
Si $u(b, x) = (g(b, x), f(b, x))$ entonces g, f son continuas y tenemos que $pu = p$ implica que $g(b, x) = b$. Además si u es un B-morfismo entonces la restricción a $p^{-1}(b) = \{b\} \times \mathbb{F}^k$ de u es lineal, es decir,

$$
\begin{aligned}
u(b, x+x') = u(b,x) + u(b,x') &\Rightarrow (b, f(b, x+x')) = (b, f(b,x)) + (b, f(b,x')) \\
&\Rightarrow f(b, x+x') = f(b,x) + f(b,x')
\end{aligned}
$$

y para todo $a \in \mathbb{F}$,

$$
\begin{aligned}
u(b, ax) = a \cdot u(b,x) &\Rightarrow (b, f(b, ax)) = a(b, f(b,x)) \\
&\Rightarrow f(b, ax) = af(b,x).
\end{aligned}
$$

Así, f es lineal en x. Por lo tanto si u es un B-morfismo entre ξ y η entonces es de la forma $u(b,x) = (b, f(b,x))$ con f continua y lineal en x.

Es fácil ver que $Id_E : ((E, c_E), p, (B, c_B)) \to ((E, c_E), p, (B, c_B))$ es también un B-morfismo y que composición de B-morfismos es nuevamente un B-morfismo. Un isomorfismo entre haces vectoriales sobre B es un morfismo $u : \xi \to \xi'$ para el cual existe un morfismo $v : \xi' \to \xi$ con $vu = Id_\xi$ y $uv = Id_{\xi'}$.

Teorema 3.1. *Sea $u : \xi \to \xi'$ un B-morfismo entre dos haces vectoriales. Entonces u es un isomorfismo si y sólo si $u : (E_b, c_{E_b}) \to (E'_b, c_{E'_b})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $b \in B$.*

Demostración. Supongamos que u es un isomorfismo, entonces existe $u^{-1} : E(\xi') \to E(\xi)$ tal que u y u' son inversas y $pu^{-1} = p'$. Notemos que si $x \in p^{-1}(b)$ entonces

$$
\begin{aligned}
p(x) = b &\Rightarrow p'u(x) = b \\
&\Rightarrow u(x) \in (p')^{-1}(b).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si $y \in (p')^{-1}(b)$ entonces

$$
\begin{aligned}
p'(y) = b &\Rightarrow pu^{-1}(y) = b \\
&\Rightarrow u^{-1}(y) \in p^{-1}(b)
\end{aligned}
$$

Luego $u(u^{-1}(y)) = y$ y así $u : (E_b, c_{E_b}) \to (E'_b, c_{E'_b})$ es sobreyectiva. Como u es isomorfismo tenemos que la restricción de u a $p^{-1}(b)$ es inyectiva.
Dado que u es un B-morfismo de haces vectoriales se tiene que la restricción de

$$
u : (E_b, c_{E_b}) \to (E'_b, c_{E'_b})
$$

es lineal y por consiguiente un isomorfismo de espacios vectoriales.

Supongamos ahora que $u : (E_b, c_{E_b}) \to (E'_b, c_{E'_b})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $b \in B$. Sea u_b la inversa de $u\big|_{p^{-1}(b)}$. Definimos $v : E(\xi') \to E(\xi)$ de tal forma que $v\big|_{(p')^{-1}(b)} = u_b$. Entonces v es la inversa de u y probaremos que es continua. Sea $b \in B$ existen vecindades U_b, U'_b de b y

$$
h : (U_b \times F^k, c_{U_b} \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p^{-1}(U_b), c_{p^{-1}(U_b)})
$$

un U_b-isomorfismo. Así como

$$
h' : (U'_b \times F^k, c_{U'_b} \times c_{\mathbb{F}^k}) \to ((p')^{-1}(U'_b), c_{(p')^{-1}(U'_b)})
$$

un U'_b-isomorfismo. Tomamos $V = U_b \cap U'_b$, entonces V es una vecindad de b y además se tiene que

$$
\begin{aligned}
h &: (V \times F^k, c_V \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p^{-1}(V), c_{p^{-1}(V)}) \\
h' &: (V \times F^k, c_V \times c_{\mathbb{F}^k}) \to ((p')^{-1}(V), c_{p^{-1}(V)})
\end{aligned}
$$

son $V-$isomorfismos. Tenemos luego que $(h')^{-1}uh : (V \times F^k, c_V \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (V \times F^k, c_V \times c_{\mathbb{F}^k})$ es un V-morfismo pues es composición de funciones continuas y además satisface que $\pi_1((h')^{-1}uh) = \pi_1$ donde π_1 es la proyección en la primera coordenada. Por el ejemplo 3.1 tenemos que $((h')^{-1}uh)(a,x) = (a, f(a,x))$ con $f : (V \times F^k, c_\Pi) \to (\mathbb{F}^k, c_\tau)$ continua y lineal en x.
Para cada $a \in V$ tenemos que $f_a(x) = f(a,x)$, entonces f_a es un elemento de $GL_n(\mathbb{F})$ que depende continuamente en a, es decir podemos considerar a f_a como una matriz de n^2 entradas que dependen continuamente en a.
Por otro lado tenemos que $h^{-1}vh'(a,x) = (a, g_a^{-1}(x))$. Como g_a^{-1} es una combinación algebraica de las entradas de la matriz g_a tenemos que depende continuamente en a, así que $h^{-1}vh'$ es continua. Por lo tanto v es continua en $(p')^{-1}(V)$.
Dado que $b \in B$ fue arbitrario tenemos que existe una cubierta $\{V_i\}$ de vecindades de B tales que las vecindades $(p')^{-1}(V_i)$ cubren a $E(\xi')$ y la restricción de v a cada una de ellas es continua.Por el corolario 1.2.1 se tiene que v es continua en $E(\xi')$.
Por lo tanto u es un isomorfismo.

■

3.2. Haces vectoriales inducidos

Proposición 3.2. *Sea ξ un haz vectorial sobre B de dimensión k, y sea*

$$f : (B_1, c_{B_1}) \to (B, c_B)$$

una función continua. Entonces $f^*(\xi)$ admite una estructura de haz vectorial y $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$ es un morfismo de haces vectoriales. Más aún,

$$f_\xi : (p_1^{-1}(b_1), c_{p_1^{-1}(b_1)}) \to (p^{-1}(f(b_1)), c_{p^{-1}(f(b_1))})$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Notemos primero que la fibra de $f^*(\xi)$ sobre $b_1 \in B_1$ es

$$\begin{aligned} p_1^{-1}(b_1) &= \{(b_1, x) \in B_1 \times E \mid f(b_1) = p(x)\} \\ &= b_1 \times p^{-1}(f(b_1)). \end{aligned}$$

Dado que $p^{-1}(f(b_1))$ tiene estructura de espacio vectorial podemos definir para todo $(b_1, x), (b_1, x') \in p_1^{-1}(b_1)$

$$(b_1, x) + (b_1, x') = (b_1, x + x'),$$

y $a \in \mathbb{F}$

$$a(b_1, x) = (b_1, ax).$$

Con esto, $p_1^{-1}(b_1)$ tiene una estructura natural de espacio vectorial. Observemos que

$$\begin{aligned} f_\xi((b_1, y) + (b_1, z)) &= f_\xi((b_1, y + z)) \\ &= y + z \\ &= f_\xi(b_1, y) + f_\xi(b_1, z), \end{aligned}$$

y para $a \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} f_\xi(a(b_1, y)) &= f_\xi(b_1, ay) \\ &= ay \\ &= af_\xi(b_1, y)). \end{aligned}$$

Así, $f_\xi \mid p_1^{-1}(b_1)$ es lineal.
Por otro lado si $x \in p^{-1}(f(b_1))$ entonces tenemos que $p(x) = f(b_1)$. Como $(b_1, x) \in p_1^{-1}(b_1)$ y $f_\xi(b_1, x) = x$ tenemos que f_ξ es sobreyectiva. Además si $f_\xi(b_1, x) = f_\xi(b_1, y)$ entonces $x = y$ y con esto tenemos que f_ξ es inyectva. Por lo tanto $f_\xi \mid p_1^{-1}(b_1)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
Sea $b_1 \in B_1$ entonces existe una vecindad U de $f(b_1)$ y un U-isomorfismo

$$h : (U \times \mathbb{F}^k, c_U \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p^{-1}(U), c_{p^{-1}(U)})$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{F}^k \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Definimos

$$h' : (f^{-1}(U) \times \mathbb{F}^k, c_{f^{-1}(U)} \times c_{\mathbb{F}^k}) \to (p_1^{-1}(f^{-1}(U)), c_{p_1^{-1}(f^{-1}(U))})$$

por $h'(b_1, x) = (b_1, h(f(b_1), x))$. Notemos que

$$p_1 h(b_1, x) = p_1(b_1, h(f(b_1), x)) = b_1 = \pi_1(b_1, x).$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \times \mathbb{F}^k \arrow[rr, "h'"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & p_1^{-1}(f^{-1}(U)) \arrow[dl, "p"] \\ & f^{-1}(U) & \end{tikzcd}$$

Como h es continua tenemos que h' es continua y en consecuencia es un $f^{-1}(U)$-morfismo de haces vectoriales.

Probaremos ahora que h' es un isomorfismo. Sea $(b_1, x) \in p_1(f^{-1}(U)) = \{(b, x) \in B_1 \times E : b_1 \in f^{-1}(U), x \in p^{-1}(f(b_1))\}$. Como $b_1 \in f^{-1}(U)$ y $p(x) = f(b_1)$ tenemos que $x \in p^{-1}(U)$. Por ser h un isomorfismo existe $(b, y) \in U \times \mathbb{F}^k$ tal que $h(b, y) = x$. Como $ph = \pi_1$ tenemos que $b = p(x)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} h'(b_1, y) &= (b_1, h(b_1, h(f(b_1), y)) \\ &= (b_1, h(p(x), y)) \\ &= (b_1, h(b, y)) \\ &= (b_1, x), \end{aligned}$$

en consecuencia h' es sobreyectiva.
Supongamos ahora que $h'(b_1, x) = h'(b_2, y)$ entonces se tiene que $(b_1, h(f(b_1), x)) = (b_2, h(f(b_2), y))$. Entonces $b_1 = b_2$ y $h(f(b_1), x) = h(f(b_2), y)$. Como h es un isomorfismo tenemos que $f(b_1) = f(b_2)$ y $x = y$. Así, $(b_1, x) = (b_2, y)$ y en consecuencia h es inyectiva. Entonces h' es un isomorfismo de espacios vectoriales.
Como f es continua tenemos que $f^{-1}(U)$ es una vecindad de U y así concluimos que $f^*(\xi)$ es un haz vectorial.

$\blacksquare$

Teorema 3.2. *Sean ξ y η dos haces vectoriales. Para una función continua $f : B(\eta) \to B(\xi)$, los haces vectoriales η y $f^*(\xi)$ son $B(\eta)$-isomorfos si y sólo si existe un morfismo $(u, f) : \eta \to \xi$ tal que u es un isomorfismo en cada fibra de η.*

Demostración. Si $(u, f) : \eta \to \xi$ es un morfismo de haces vectoriales entonces u se factoriza como $f_\xi v = u$ con $v(y) = (p_\eta(y), u(y))$. Por el teorema 3.1 tenemos que v es un $B(\eta)$-isomorfismo si y sólo si v es un isomorfismo en cada fibra, lo que es equivalente a que $u : p_\eta^{-1}(b) \to p_\xi^{-1}(f(b))$ sea un isomorfismo para todo $b \in B(\eta)$.

■

4. Haces fibrados

4.1. Haces definidos por grupos de transformación

Definición 4.1. Un grupo topológico G es un conjunto G junto con una estructura de grupo y una topología τ tal que la función $(s, t) \mapsto st^{-1}$ es una función continua $G \times G \to G$.

Notemos que la definición anterior es equivalente a que las funciones $(s, t) \mapsto st$ y $s \mapsto s^{-1}$ sean continuas. Esto pues $s \mapsto s^{-1}$ es la composición de la función $s \mapsto (1, s)$ con la función $(t, s) \mapsto ts^{-1}$ donde ambas son continuas. Y por otro lado $(s, t) \mapsto st$ es la composición de la función $(s, t) \mapsto (s, t^{-1})$, que es continua por lo anterior, con la función $(s, t) \mapsto st^{-1}$.

Si $(s, t) \mapsto st$ y $s \mapsto s^{-1}$ son continuas entonces la función $(s, t) \mapsto st^{-1}$ es la composición de las funciones $(s, t) \mapsto (s, t^{-1})$ con $(s, t) \mapsto st$ y en consecuencia $(s, t) \mapsto st^{-1}$ es continua.

Definición 4.2. Para un grupo topológico G un G-espacio cerradura derecho es un espacio cerradura (X, c_X) junto con una función continua $(X \times G, c_X \times c_\tau) \to (X, c_X)$. La imagen de $(x, s) \in X \times G$ bajo esta función es xs. Suponemos los siguientes axiomas

1. Para cada $x \in X$, $s, t \in G$, se cumple la relación $x(st) = (xs)t$.
2. Para cada $x \in X$ la relación $x1 = x$ se cumple, donde 1 es la identidad de G.

Un espacio (X, c_X) es un G-espacio cerradura izquierdo si hay una función continua $(G \times X, c_\tau \times c_X) \to (X, c_X)$ tal que $(st)x = s(tx)$ y $1x = x$, donde 1 es la identidad de G.

Si (X, c_X) es un G-espacio cerradura izquierdo, entonces $xs = s^{-1}x$ define una estructura de G-espacio cerradura derecho en (X, c_X). Dado que hay una correspondencia biyectiva entre G-espacios cerradura derechos e izquierdos, estudiaremos solamente los G-espacios cerradura derechos.

Definición 4.3. Una función continua $h : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$ de un G-espacio en otro es llamado G-morfismo si satisface que $h(xs) = h(x)s$ para todo $x \in X$ y $s \in G$.

Sea $M_G((X, c_X), (Y, c_Y))$ el subespacio de los G-morfismos $(X, c_X) \to (Y, c_Y)$. Facilmente podemos ver que la composición de G-morfismos es un G-morfismo. La clase de G-espacios cerradura y G-morfismos forman una categoría denotada por $\mathbf{sp}_G$.

Dos elementos $x, x' \in X$ donde (X, c_X) es un G-espacio son llamados G-equivalentes si existe $s \in G$ con $xs = x'$. Esta relación es de equivalencia. Denotamos por

$$xG = \{xs : s \in G\}$$

a la clase de equivalencia determinada por $x \in X$.

Sea $(X \text{ mod } G, c_\pi)$ el espacio cerradura que consiste del espacio $X \text{ mod } G = \{xG \mid x \in X\}$ junto con la estructura cerradura cociente inducida por el mapa $\pi(x) = xG$.

Proposición 4.1. *Para un G-espacio cerradura (X, c_X), el mapa $x \mapsto xs$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Primero notemos que la función $x \mapsto xs$ es continua pues es la composición de la función $x \mapsto (x, s)$ con $(x, t) \mapsto st$ donde ambas son continuas. La inversa de la función $x \mapsto xs$ es $x \mapsto xs^{-1}$ la cual también es continua.

■

Proposición 4.2. *Sea $p : (X, c_X) \to Z$ una función sobreyectiva y c_p la estructura cerradura cociente en Z inducida por p. Una función $f : (Z, c_p) \to (Y, c_Y)$ es continua si y solo si fp es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "fp"] & \\ Z \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Este es el inciso b de la proposición 33.C.5 de [1] ■

En lo sucesivo denotaremos a $X \text{ mod } G$ por X/G.

Proposición 4.3. *Sea $f : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$ un G-morfismo. Sean*

$$p : (X, c_X) \to (X/G, c_p)$$
$$q : (Y, c_Y) \to (Y/G, c_q)$$

los mapas cocientes canónicos. La función

$$\begin{aligned} f_G : (X/G, c_p) &\to (Y/G, c_q) \\ xG &\mapsto f(x)G \end{aligned}$$

es una función continua entre espacios cerradura.

Demostración. Primero veamos que f_G está bien definida. Supongamos que $xG = zG \in X/G$, entonces existe $s \in G$ tal que $xs = z$. Como f es un G-morfismo se tiene que $f(z) = f(xs) = f(x)s$, luego

$$\begin{aligned} f_G(zG) &= f(z)G \\ &= f(x)sG \\ &= f(x)G \\ &= f_G(xG) \end{aligned}$$

y así, f_G está bien definida.
Notemos ahora que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "qf"] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/G \arrow[r, "f_G"'] & Y/G. \end{tikzcd}$$

Como f y q son funciones continuas tenemos que fq es continua. Dado que $f_G p = qf$ se sigue de la proposición anterior que f_G es continua.

■

Observemos que cada $G-$espacio cerradura (X, c_X) determina un haz $\alpha(X, c_X) = ((X, c_X), \pi, (X/G, c_\pi))$. Si $h : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$ es un $G-$morfismo tenemos que $\alpha(h) = (h, h_G)$ define un morfismo entre $\alpha(X, c_X)$ y $\alpha(Y, c_Y)$.

Proposición 4.4. *Sea α definido como arriba. Entonces α define un funtor de la categoría $\boldsymbol{sp}_G$ en la categoría de haces **Bun** .*

Demostración. Claramente α toma un $G-$espacio cerradura y nos da un haz como vimos anteriormente. Notemos que

$$\begin{aligned} (Id_X)_G : (X/G, c_\pi) &\to (X/G, c_\pi) \\ xG &\mapsto Id_X(x) = xG. \end{aligned}$$

Entonces $\alpha(Id_X) = (Id_X, (Id_X)_G) = (Id_X, Id_{X/G})$. Por otro lado, si $h : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$ y $k : (Y, c_Y) \to (Z, c_Z)$ son dos $G-$morfismos entonces

$$\begin{aligned} (kh)_G(xG) &= kh(x)G \\ &= k(h(x)G) \\ &= k(h_G(xG)) \\ &= k_G(h_G(xG)). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(kh) &= (kh, (kh)_G) \\ &= (kh, k_G h_G) \\ &= \alpha(k)\alpha(h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha : \mathbf{sp}_G \to \mathbf{Bun}$ es un funtor.

■

Definición 4.4. Un haz $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ es llamado $G-$fibrado si ξ y $\alpha(X, c_X)$ son isomorfos, para alguna estructura de $G-$espacio cerradura en X, por medio de un isomorfismo $(1, f) : \alpha(X) \to \xi$ para el cual $f : (X/G, c_\pi) \to (B, c_B)$ es un homeomorfismo.

Observación. Si $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ es un $G-$fibrado existe un homeomorfismo

$$f : (X/G, c_\pi) \to (B, c_B)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X/G \arrow[rr, "f"'] & & B. \end{tikzcd}$$

es decir, $f\pi = p$. Entonces para todo $s \in G$,

$$p(xs) = f(\pi(xs)) = f(xsG) = f(xG) = p(x).$$

4.2. Definición de haces principales

Un $G-$espacio cerradura (X, c_X) tiene la propiedad de que la relación $xs = x$ se satisface solo para $s = 1$ si y sólo si tiene la propiedad de que $xs = xt$ se cumple solo para $s = t$.

Definición 4.5. Un $G-$espacio X es llamado efectivo si tiene la propiedad de que $xs = x$ implica $s = 1$. Sea (X^*, c_{X^*}) el subespacio de todos los $(x, xs) \in X \times X$, donde $x \in X$, $s \in G$ para un $G-$espacio cerradura efectivo (X, c_X). Una función continua $\tau : (X^*, c_{X^*}) \to G$ tal que $x\tau(x, x') = x'$ se llama función de translación.

De la definición anterior se sigue que

1. $\tau(x, x) = 1$
   Para ver esto notemos que
   $$x\tau(x, x) = x \Rightarrow \tau(x, x) = 1$$
   por ser (X, x_X) G-efectivo.

2. $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$.
   Esto pues
   $$\begin{aligned} x\tau(x, x')\tau(x', x'') &= x'\tau(x', x'') \\ &= x'' \\ &= x\tau(x, x'') \end{aligned}$$
   y por ser (X, x_X) G-efectivo se cumple que $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$.

3. $\tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1}$
   Esto se puede ver de la siguiente forma
   $$\tau(x', x)\tau(x, x') = \tau(x', x') = 1$$
   $$\tau(x, x')\tau(x', x) = \tau(x, x) = 1$$

Definición 4.6. Un $G-$espacio cerradura (X, c_X) es llamado principal si (X, c_X) es un $G - espacio$ cerradura efectivo con una función de translación continua $\tau : (X^*, c_{X^*}) \to (G, c_\tau)$. Un $G-$fibrado principal es un $G-$fibrado $((X, c_X), p, (B, c_B))$, donde (X, c_X) es un G-espacio principal.

Ejemplo 4.1. Consideremos el espacio cerradura $(B \times G, c_B \times c_\tau)$. Definimos la acción de G en $B \times G$ por $(b, s)t = (b, st)$ y notemos que si $(x, s)t = (x, s)$ entonces $st = s$ y en consecuencia $t = 1$. Así X es un $G-$espacio efectivo . Por otro lado se tiene que $((b, t), (b', t')) \in (B \times G)^*$ si y sólo si existe $k \in G$ tal que $(b, t) = (b', t')k$, es decir, si y sólo si $b = b'$ y $t = t'k$.
Definimos
$$\begin{aligned} \tau : ((B \times G)^*, c_{(B\times G)^*}) &\to (G, \tau) \\ ((b, t), (b, t')) &\mapsto t^{-1}t'. \end{aligned}$$
Notemos que es continua pues es la composición
$$((B \times G)^*, c_{(B\times G)^*}) \xrightarrow{\mathrm{q}} (G \times G, c_\tau \times c_\tau) \xrightarrow{\mathrm{h}} (G \times G, c_\tau \times c_\tau) \xrightarrow{\mathrm{p}} (G, c_\tau)$$
donde $q((b, t), (b, t')) = (t, t'), h(a, b) = (a^{-1}, b)$ y $p(a, b) = ab$. Por ser G un grupo topológico se tiene que h y p son continuas. Para ver que q es continua nos basta probar que p_iq es continua para i=1,2 donde p_i es la proyección en la i-ésima coordenada de $(G \times G, c_\tau \times c_\tau) \to (G, c_\tau)$. Si π_i es la proyección en la i-ésima coordenada de $(B \times G)^*$ entonces $\pi_iq = p_2\pi_i$. Como cada π_iq es composición de funciones continuas tenemos que q es continua. Así que τ es continua. Para ver que τ es de translación notemos que
$$\begin{aligned} (b, t)\tau((b, t), (b, t')) &= (b, t)(t^{-1}t') \\ &= (b, t(t^{-1}t') \\ &= (b, t'). \end{aligned}$$

Así, τ es una función de translación. Entonces $((B\times G, c_B\times c_G), p, (B, c_B))$ es un G-fibrado principal y a este se le llama G-fibrado producto principal.

Proposición 4.5. *Sea $\xi = ((E, c_E), p, (B, c_B))$ un $G-$fibrado principal. Entonces ξ es un haz con fibra G.*

Demostración. Para $x \in p^{-1}(b)$ definimos la función $u : (G, c_\tau) \to (p^{-1}(b), c_{p^{-1}(b)})$ por la relación $u(s) = xs$. Está bien definida pues $b = p(x) = p(xs)$ por ser ξ un $G-$fibrado. Como u es la composición de las funciones

$$(G, c_\tau) \to (X \times G, c_X \times c_\tau) \to (X, c_X)$$

$$s \mapsto (x, s) \mapsto xs$$

se tiene que u es continua.
Por otro lado, como ξ es un G-fibrado se tiene que existe un homeomorfismo

$$f : (X/G, c_\pi) \to (B, c_B)$$

tal que $f\pi = p$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X/G \arrow[rr, "f"'] & & B. \end{tikzcd}$$

Observemos que si $x, y \in p^{-1}(b)$ entonces tenemos que

$$f(xG) = p(x) = b = p(y) = f(yG).$$

Como f es inyectiva se tiene que $xG = yG$, existe $s \in G$ tal que $xs = y$. Con esta observación tenemos que para $x' \in p^{-1}(b)$ la expresión $\tau(x, x')$ está bien definida. Definimos con esto la función $v : p^{-1}(b) \to G$ por $v(x') = \tau(x, x')$. Como v es la composición de las funciones continuas $x' \mapsto (x, x')$ y $(x, y) \mapsto \tau(x, x')$, se tiene que v es continua.
Además se tiene que

$$uv(x') = u(\tau(x, x')) = x\tau(x, x') = x'$$
$$vu(s) = v(xs) = \tau(x, xs).$$

Notemos ahora que

$$x\tau(x, xs) = xs \Rightarrow \tau(x, xs) = s.$$

Así, $vu(s) = s$ y con esto tenemos que u es un homeomorfismo. Por lo tanto ξ es un haz con fibra G.

■

4.3. Categorías de haces principales

Definición 4.7. Un morfismo $(u, f) : ((X, c_X), p, (B, c_B)) \to ((X', c_{X'}), p', (B', c_{B'}))$ entre dos G-fibrados principales es un morfismo principal si $u : (X, c_X) \to (X', c_{X'})$ es un morfismo entre G-espacios. Si $(B, c_B) = (B', c_{B'})$ y $f = Id_B$ entonces u es llamado un B-morfismo principal.

Dado que la composición de de morfismos o B-morfismos principales es un morfimso o B-morfismo principal, respectivamente, podemos hablar de la categoría $\mathbf{Bun}(G)$ que consiste de los G-fibrados y morfismos principales y de su subcategoría $\mathbf{Bun}_B(G)$ que consiste de G-fibrados y morfismos principales sobre B.

4.4. Haces inducidos de haces principales

La siguiente proposición dice que la propiedad de ser un G-fibrado o G-fibrado principal es estable bajo la operación de tomar haces inducidos.

Proposición 4.6. *Sea $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ un G-fibrado. Para cada función continua $f : (B_1, c_{B_1}) \to (B, c_B)$ el espacio total (X_1, c_{X_1}) de $f^*(\xi) = ((X_1, c_{X_1}), p_1, (B_1, c_{B_1})$ tiene una estructura natural de G-espacio y existe un homeomorfismo*

$$g : (X_1/G, c_\pi) \to (B_1, c_{B_1})$$

que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[rr, "f_\xi"] & & X \arrow[d, "p"] \\ X/G \arrow[rr, "g"'] & & B_1 \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Más aún, la estructura de G-espacio en X_1 puede ser elegida de tal forma que f_ξ sea un G-morfismo. Finalmente, si ξ es un G-fibrado principal entonces $f^*(\xi)$ es un G-fibrado principal.

Demostración. Definimos la acción de G en X_1 por la relación $(b_1, x)s = (b_1, xs)$, donde $p(xs) = p(x) = f(b_1)$. Entonces $f_\xi((b_1, x)s) = xs = f_\xi(b_1, x)s$ y f_ξ es un G-morfismo.

Definimos ahora $g((b_1, x)G) = b_1$. Como $g\pi = p_1$ es continua tenemos que g es continua por la proposición 4.2 y por ser p sobreyectiva g también lo es. Supongamos que $g((b_1, x)G) = g((b_2, x')G)$, entonces $b_1 = b_2$ y $b_1 = p(x) = p(x')$. Así, existe $s \in G$ tal que $x' = xs$ y entonces

$$(b_1, x)G = (b_1, x)sG = (b_1, xs)G = (b_1, x')G$$

y en consecuencia g es inyectiva. Como g es una función continua biyectiva, por la proposición 1.4 nos basta probar que para toda vecindad W de $(b_1, x)G$ se tiene que $g(W)$ es vecindad de b_1. Para esto notemos que $g(W) = p_1\pi^{-1}(W)$ y por ser π continua se tiene que $\pi^{-1}(W)$ es una vecindad de (b_1, x). Luego de la proposición 1.5 se sigue que $p_1\pi^{-1}(W) = g(W)$ es una vecindad de $p_1(b_1, x) = b_1$. Así, g es un homeomorfismo y por la definición de g tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[rr, "f_\xi"] & & X \arrow[d, "p"] \\ X/G \arrow[rr, "g"'] & & B_1 \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

conmuta. Finalmente, si $\tau : (X^*, c_{X^*}) \to (G, c_\tau)$ es una función de translación para X observe que $((b_1, x), (b_1', x')) \in X_1^*$ si y sólo si $b_1 = b_1'$ y $(x, x') \in X^*$. Entonces

$$\tau_1 : (X_1^*, c_{X_1^*}) \to (G, c_\tau)$$

definida por $\tau_1((b_1, x), (b_1, x')) = \tau(x, x')$ es una función de translación para X_1. Para ver esto notemos que

$$(b_1, x)\tau_1((b_1, x), (b_1, x')) = (b_1, x)\tau(x, x') = (b_1, x\tau(x, x')) = (b_1, x').$$

Para probar τ_1 es continua nos basta ver que τ_1 se puede factorizar de la siguiente forma

$$(X_1^*, c_{X_1^*}) \to (X*, c_{X^*}) \to (G, c_\tau)$$

$$((b_1, x), (b_1', x')) \mapsto (x, x') \mapsto \tau(x, x')$$

y entonces nos basta probar que la función $((b_1, x), (b_1', x')) \mapsto (x, x')$ es continua. Para ver esto es suficiente probar que las funciones $((b_1, x), (b_1', x')) \mapsto x$ y $((b_1, x), (b_1', x')) \mapsto x'$ lo cuál es claro. Por lo tanto si ξ es un G-fibrado principal entonces $f^*(\xi)$ también lo es. ∎

4.5. Definición de haces fibrados

Sea $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ un G-fibrado principal y sea (F, c_F) un G-espacio izquierdo. La relación $(x, y)s = (xs, s^{-1}y)$ define una estructura de G-espacio en $(X \times F, c_X \times c_F)$. Sean $X_F = (X \times F)/G$ y c_{X_F} la estructura cerradura cociente más inducida por el mapa $\pi : (X \times F, c_X \times c_F) \to (X_F, c_{X_F})$. Definimos $p_F((x, y)G) = p(x)$ para $(x, y) \in X \times F$. Veremos que g está bien definida. Supongamos que $(x, y)G = (x', y')G$, entonces existe $s \in G$ tal que $(x', y') = (x, y)s = (xs, s^{-1}y)$. Como ξ es un G-fibrado tenemos que $p(x) = p(xs)$ y así

$$p_F((x', y')G = p(x') = p(xs) = p_F((x, y)G),$$

luego p_F está bien definida. Para ver que p_F es continua primero observamos que $p_F\pi = p$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(X \times F) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p\pi_1"] & \\
(X \times F)/G \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde $\pi_1 : (X \times F, c_X \times c_F) \to (X, c_X)$ es la proyección en la primer coordenada. Como $p\pi_1$ es continua tenemos que p_F es continua.

Definición 4.8. Con la notación anterior, el haz $((X_F, c_{X_F}), p_F, (B, c_B))$, denotado por $\xi[F]$, es llamado el haz fibrado sobre (B, c_B) con fibra F y haz principal asociado ξ. El grupo G es llamado el grupo estructura del haz fibrado $\xi[F]$.

Proposición 4.7. *Sea $\xi[F] = ((X_F, c_{X_F}), p_F, (B, c_B))$ el haz fibrado con G-fibrado principal asociado $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ y fibra (F, c_F). Para cada $b \in B$, la fibra (F, c_F) es homeomorfa a $p_F^{-1}(b)$.*

Demostración. Sea $p(x_0) = b$ para algún $x_0 \in X$, y sea $f(y) = (x_0, y)G$ una función $f : (F, c_F) \to (X_F, c_{X_F})$. Notemos que f es continua pues es la composición de las funciones continuas $y \mapsto (x_0, y)$ y π. Dado que $p_F((x_0, y)G) = p(x_0) = b$ podemos ver a $f : (F, c_F) \to (p_F^{-1}(b), c_{p_F^{-1}(b)})$ por la restricción en el rango de X_F a $p_F^{-1}(b)$ y como f es continua esta restricción también lo es.
Probaremos que f tiene una inversa continua, para ello consideremos el mapa

$$g_1 : (E_b \times F, c_{E_b} \times c_F) \to (F \times c_F)$$

definido por $g_1(x, y) = \tau(x_0, x)y$, donde $E_b = p^{-1}(b)$ y $\tau : (X^*, c_{X^*}) \to (G, c_\tau)$ es la función de translación del G-espacio principal X.
Ahora definimos $g : (p_F^{-1}(b), c_{p_F^{-1}(b)}) \to (F, c_F)$ por $g((x, y)G) = g_1(x, y)$. Supongamos

que $(x,y)G = (x',y')G \in p_F^{-1}(b)$, entonces existe $s \in S$ tal que $(xs, s^{-1}y) = (x',y')$. Como $g_1(xs, s^{-1}y) = p(x) = g_1(x,y)$ tenemos que $g((x,y)G) = g((x',y')G)$ y así g está bien definida.
Notemos ahora que g_1 es la composición de las funciones

$$(E_b \times F, c_{F_b} \times c_F) \xrightarrow{h} (G \times F, c_\tau \times c_F) \xrightarrow{\cdot} (F, c_\tau)$$

$$(x,y) \mapsto (\tau(x_0,x), y) \mapsto \tau(x_0,x)y.$$

Como la acción de G en X es continua, nos basta probar que

$$h : (E_b \times F, c_{E_b} \times c_F) \to (G \times F, c_\tau \times c_F)$$

definida por $h(x,y) = (\tau(x_0,x), y)$ es continua y para ello es suficiente ver que $p_1 h : (E_b \times F, c_{E_b} \times c_F) \to (G, c_\tau)$ es continua. Pero $p_1 h$ la podemos ver como la composición

$$(E_b \times F, c_{E_b} \times c_F) \xrightarrow{h_1} (X \times X, c_X \times c_X) \xrightarrow{\tau} (G, c_\tau)$$

$$(x,y) \mapsto (x_0, x) \mapsto \tau(x_0,x)$$

y por ser τ continua nos basta probar que h_1 es continua pero esto es claro dado que $p_1 h_1$ es un mapa constante y $p_2 h_1$ es la identidad en (X, c_X). Así, g_1 es continua.
Por otro lado tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_b \times F \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\
p_F^{-1}(b) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $g\pi = g_1$ y como g_1 es continua se tiene que g es continua.
Veamos ahora que g es la inversa de f, tenemos que

$$\begin{aligned}
fg((x,y)G) &= f(g_1(x,y)) \\
&= f(\tau(x_0,x)y) \\
&= (x_0, \tau(x_0,x)y)G
\end{aligned}$$

y como $(x,y)\tau(x,x_0) = (x_0, \tau(x_0,x)y)$ se tiene que

$$fg((x,y)G) = (x,y)G.$$

También se tiene que

$$\begin{aligned}
gf(y) &= g((x_0,y)G) \\
&= g_1(x_0,y) \\
&= \tau(x_0,x_0)y \\
&= y
\end{aligned}$$

Así, g es la inversa de f. Por lo tanto $g : (p_F^{-1}(b), c_{p_F^{-1}(b)}) \to (F, c_\tau)$ es continua.

■

4.6. Propiedades funtoriales de haces fibrados

Sean $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ y $\xi' = ((X', c_{X'}), p, (B', c_{B'}))$ dos haces fibrados. Sean $(u, f) : \xi \to \xi'$ un morfismo de haces principales, y (F, c_F) un G-espacio izquierdo. El morfismo (u, f) define un G-morfismo $u \times 1_F : (X \times F, c_X \times c_F) \to (X' \times F, c_{X'} \times c_F)$. Por la proposición 4.3 tenemos que $u_F : (X_F, c_{X_F}) \to (X'_F, c_{X'_F})$ es continua. Notemos que

$$\begin{aligned} p'_F u_F((x,y)G) &= p'_F((u(x), y)G) \\ &= p'(u(x)) \\ &= fp(x) \\ fp_F((x,y)G). \end{aligned}$$

Entonces $p'_F u_F = fp_F$ y en consecuencia $(u_F, f) : \xi[F] \to \xi'[F]$ es un morfismo.

Definición 4.9. Un morfismo de haces fibrados de $\xi[F]$ a $\xi'[F]$ es un morfismo de haces de la forma $(u_F, f) : \xi[F] \to \xi'[F]$, donde $(u, f) : \xi \to \xi'$ es un morfismo de haces principales. Si $(B, c_B) = (B', c_{B'})$ y $f = 1_B$, entonces $u_F : \xi[F] \to \xi'[F]$ es llamado un morfismo de haces fibrados sobre (B, c_B).

Proposición 4.8. *Las funciones $\xi \mapsto \xi[F]$ y $(u, f) \mapsto (u_F, f)$ define un funtor de la categoría de G-fibrados principales en la categoría de haces, admitiendo la estructura de un haz fibrado con fibra (F, c_τ) y grupo estructura (G, c_τ).*

Demostración. Sean $(u, f) : \xi \to \xi'$ y $(u', f') : \xi' \to \xi''$ morfismos de G-fibrados principales. Tenemos que

$$\begin{aligned} (u'u)_F((x,y)G) &= (u'u(x), y)G \\ &= u'_F((u(x), y)G) \\ &= u'_F u_F((x,y)G) \end{aligned}$$

y en consecuencia $((u'u)_F, f'f) = (u'_F u_F, f'f) = (u'_F, f') \circ (u_F, f)$. Por otro lado

$$(1_X)_F((x,y)G) = (x,y)G$$

implica que $(1_X)_F = 1_{X_F}$. Por lo tanto las funciones $\xi \mapsto \xi[F]$ y $(u, f) \mapsto (u_F, f)$ define un funtor.

■

Proposición 4.9. *Sea $\xi = ((X, c_X), p, (B, c_B))$ un G-fibrado principal y $\xi[F]$ un haz fibrado. Para cada función continua $f : (B_1, c_{B_1}) \to (B, c_B)$ existe un isomorfismo de haces canónico $g : f^*(\xi[F]) \to f^*(\xi)[F]$ sobre B_1 tal que el morfismo natural $f_{E[\xi]}$: $f^*(\xi[F]) \to \xi[F]$ se factoriza por*

$$f^*(\xi[F]) \xrightarrow{g} f^*(\xi)[F] \xrightarrow{f_\xi)_F} \xi[F]$$

Demostración. El espacio total X_1 de $f^*(\xi[F])$ es

$$X_1 = \{(b_1, (x,y)G) \in B_1 \times (X \times F)/G \mid f(b_1) = p_F((x,y)G) = p(x)\}$$

y $f_{\xi[F]}(b_1, (x,y)G) = (x,y)G$.
El espacio total X_2 de $f^*(\xi)[F]$ es

$$X_2 = \{((b_1, x), y)G \in ((B_1 \times X) \times F)/G \mid f(b_1) = p(x)\}$$

y $(f_\xi)_F(((b_1,x),y)G) = (f_\xi(b_1,x),y)G = (x,y)G$.
Definimos

$$g : (X_1, c_{X_1}) \to (X_2, c_{X_2})$$
$$(b_1,(x,y)G) \mapsto ((b_1,x),y)G.$$

Veremos que está bien definida, supongamos que $(x,y)G = (x',y')G$, entonces existe $s \in G$ tal que $(x',y') = (xs, s^{-1}y)$. Así que

$$\begin{aligned} g(b_1,(x',y')G) &= ((b_1,x'),y')G \\ &= ((b_1,xs),s^{-1}y)G \\ &= ((b_1,x)s,s^{-1}y)G \\ &= ((b_1,x),y)sG \\ &= ((b_1,x),y)G \\ &= g(b_1,(x,y)G) \end{aligned}$$

Ahora veamos que g es isomorfismo. Supongamos que $g(b_1,(x,y)G) = g(b_2,(x',y')G)$, entonces $((b_1,x),y)G = ((b_2,x'),y')G$ y se tiene que existe $s \in G$tal que $((b_1,x),y)s = (b_2,x'),y')$. Es decir, $b_1 = b_2$, $xs = x'$ y $s^{-1}y = y'$. En consecuencia $(b_1,(x,y)G) = (b_2,(x',y')G)$ y g es inyectiva.
Sea $((b_1,x),y)G \in E_2$, entonces $f(b_1) = p(x)$. Así, $(b_1,(x,y)G) \in E_1$ y es tal que $g((b_1,(x,y)G) = ((b_1,x),y)G$ y g es sobreyectiva. Por lo tanto g es un isomorfismo.
Finalmente notemos que

$$\begin{aligned} (f_\xi)_F g(b_1,(x,y)G) &= (f_\xi)_F(((b_1,x),y)G) \\ &= f_\xi((b_1,x),y) \\ &= (x,y)G \\ &= f_{\xi[F]}(b_1,(x,y)G) \end{aligned}$$

■

Referencias

[1] Eduard Čech. *Topological spaces*. eng. Prague: Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1966. URL: http://eudml.org/doc/277000.

[2] Dale. Husemoller. *Fiber Bundles*. Springer, New York, NY, 1993.

[3] Antonio Rieser. “A cofibration category on closure spaces”. arXiv:1708.09558. 2018. URL: https://arxiv.org/pdf/1708.09558.pdf.